Matemática elemental para estudiantes universitarios

Alex Aro
Oscar Santander

DOI: 10.35622/inudi.b.032

EDITADA POR
INSTITUTO
UNIVERSITARIO
DE INNOVACIÓN CIENCIA
Y TECNOLOGÍA INUDI PERÚ

INUDI PERÚ
INSTITUTO UNIVERSITARIO DE INNOVACIÓN
CIENCIA Y TECNOLOGÍA

Matemática elemental para estudiantes universitarios

DOI: https://doi.org/10.35622/inudi.b.032

Alex Aro
https://orcid.org/0000-0002-8295-1816
Con afiliación a la Universidad Nacional del Altiplano, Perú

Oscar Santander
https://orcid.org/0000-0002-0780-5747
Con afiliación a la Universidad Nacional del Altiplano, Perú

Instituto Universitario
de Innovación Ciencia y Tecnología Inudi Perú

Matemática elemental para estudiantes universitarios

Alex Youn Aro Huanacuni
Oscar Santander Mamani
(Autores)

ISBN: 978-612-5069-21-4(pdf)
Hecho el depósito legal en la Biblioteca Nacional del Perú N° 2022-08951
DOI: https://doi.org/10.35622/inudi.b.032

Editado por Instituto Universitario de Innovación Ciencia y Tecnología Inudi Perú S.A.C.
Urb. Ciudad Jardín Mz. B3 Lt. 2, Puno – Perú
RUC: 20608044818
Email: editorial@inudi.edu.pe
Teléfono: +51 973668341
Sitio web: https://editorial.inudi.edu.pe

Primera edición digital
Puno, setiembre de 2022

Libro electrónico disponible en https://doi.org/10.35622/inudi.b.032

Editores:
Wilson Sucari / Patty Aza / Jannina Quilca

Índice general

Prefacio

Este libro está diseñado para estudiantes de pregrado que están iniciando su formación profesional en universidades públicas y privadas, el contenido del libro equivale al curso de matemática básica, que corresponde a estudios generales que se dicta en las distintas escuelas profesionales, una característica importante de este libro denominado *"Matemática elemental para estudiantes universitarios"* es la colección de ejercicios resueltos y propuestos, que coadyuvaran directamente en el desarrollo de sus capacidades y habilidades en resolución de ejercicios y problemas.

Este libro trata de complementar los conocimientos previos adquiridos en el nivel secundario, y a su vez profundizar los temas, con un enfoque compacto y conciso comenzando con el nivel básico y desarrollando gradualmente hasta el nivel avanzado de las matemáticas que son fundamentales en campos relacionados a la ingeniería, biomédicas y sociales. Nuestro objetivo principal es cubrir todos los temas necesarios de las matemáticas para que en lo posterior el estudiante esté en condiciones de afrontar cursos como cálculo diferencial e integral, cálculo vectorial, ecuaciones diferenciales y otros.

Durante los últimos cinco años los autores impartieron regularmente el curso de matemática básica y cursos avanzados en distintas escuelas profesionales de la Universidad Nacional del Altiplano, las notas escritas que se presentan empezaron a materializarse en los semestres 2021 - II y 2022 – I, considerando los valiosos opiniones y comentarios de los estudiantes y colegas que han influido enormemente para preparar y organizar el contenido del libro. Quedamos muy agradecidos a nuestros estudiantes y colegas por su valioso aporte, y esperamos en adelante recibir cualquier comentario o sugerencia para ediciones posteriores.

Puno, 2022.

Alex Youn Aro Huanacuni
ayaro@unap.edu.pe
Oscar Santander Mamani
osantander@unap.edu.pe

1

Lógica

El objetivo de este capítulo es exponer las proposiciones, conectivos lógicos, leyes de proposiciones, circuitos lógicos, inferencias y lógica cuantificacional; al finalizar el capítulo, el estudiante será capaz de resolver cualquier ejercicio propuesto. Para ampliar sobre el tema de conectivos lógicos ver [8, 26], respecto a inferencias y cuantificadores en lógica consulte [9, 13, 22], y para circuitos lógicos ver [14], y además otros libros como [10, 21, 25], que permite profundizar los temas desarrollados.

1.1. Proposiciones

Definición 1.1.1

Una proposición es una expresión que es verdadera o falsa, pero no ambas.

Ejemplo 1.1.1

1. $1 + 2 + 2 + 2 + 7 - 9 = 5$
2. *Brasilia es capital de Brasil.*
3. *Existen triángulos isósceles que no son equiláteros.*
4. *La selección peruana de fútbol clasificó al mundial 2022.*

Solución. *La afirmación 4 es falsa, 1, 2 y 3 son verdaderas. Por lo tanto, todas las expresiones son proposiciones.*

Ejemplo 1.1.2

1. $x + y - z = 17$
2. *Buenas noches*
3. *¿Cómo está usted?*
4. x *es blanco*
5. *Resuelva el problema*

Solución. *No son consideradas como proposiciones porque, son expresiones abiertas e imposible de determinar la verdad o la falsedad, al menos que se considere un dato adicional.*

1.2. Clasificación de las proposiciones

La proposiciones se clasifican en simples y compuestas.

Proposiciones simples (atómicas)

Las proposiciones simples son aquellas expresiones sin conectivos de enlace. Los conectivos comunes son "y", "o", "O...o...", "Si...entonces", "...si y sólo si...",...

Ejemplo 1.2.1: Proposiciones simples

1. p : *Hoy es viernes.*
2. $q : 3! \leq 2^3$
3. r : *San Martín nació en Argentina.*
4. s : *José Pedro Castillo ganó la elección presidencial 2021, en el Perú.*
5. $t : 5^0 = 1$

Proposiciones compuestas (moleculares)

Las proposiciones compuestas son oraciones o expresiones que contiene por lo menos uno de los conectivos "y", "o", "O...o...", "Si...entonces", "...si y solo si...","...es condición necesaria y suficiente para...",...

Ejemplo 1.2.2: Proposiciones compuestas

1. *Platón fue filósofo griego y discípulo de Sócrates.*
2. *Iré al estadio si y sólo si tú pagas las entradas.*
3. $2 \times 3 \div 6 \times 4 = 9 \div 3 \times 3 \div 3 + 1$ *y* $5^2 2^2 = 10^2$.
4. $0^\infty = 0$ *o* $1^\infty = 1$
5. *Si llego temprano, entonces visitaré a mis amigas.*
6. *O estoy en la casa o en la universidad.*

Definición 1.2.1: Negación

Sea p una proposición. Se define $\sim p$, y se lee:

$$\textit{No}\ \ p,$$
$$\textit{No cierto que}\ \ p,$$
$$\textit{No es verdad}\ \ p.$$

Su tabla de verdad está dada por:

p	$\sim p$
V	F
F	V

Tabla 1.1: Tabla de verdad.

Ejemplo 1.2.3

Dada las proposiciones:

1. $p : 2 \times 1 \times 2 \times 1 \times 2 = 8.$
2. q : *Arequipa es uno de los departamentos del Perú.*

Determine la tabla de verdad para la negación de p y q.
Solución.

1. $\sim p$: *No es cierto que* $2 \times 1 \times 2 \times 1 \times 2 = 8.$
2. $\sim q$: *Arequipa no es uno de los departamentos del Perú.*

La proposición $\sim p$, es falsa pues $2 \times 1 \times 2 \times 1 \times 2 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 8$. Como Arequipa es departamento del Perú, entonces $\sim q$ es falsa.

Definición 1.2.2: Conjunción

Considere p y q proposiciones. Se define $p \wedge q$, y se lee:

$$p\ \ y\ \ q,$$
$$p\ \ \textit{además}\ \ q,$$
$$p\ \ \textit{sin embargo}\ \ q.$$

p	q	p∧q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Tabla 1.2: Tabla de verdad.

Ejemplo 1.2.4

Considere

1. p: 3258 *es divisible por* 9.
2. q: $2^2 + 4^2 = 6^2$.

¿La proposición $p \wedge q$*, es verdadera?*

Solución.

$p \wedge q$: $\underbrace{3258 \text{ es divisible por } 9}_{V}$ *y* $\underbrace{2^2 + 4^2 = 6^2}_{F}$.

Aplicando la tabla de verdad 1.2, se tiene $p \wedge q$ *falsa.*

Definición 1.2.3: Disyunción inclusiva

La disyunción inclusiva de p *y* q*, está definida por* $p \vee q$*, y se lee:* p *o* q.

p	q	p∨q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Tabla 1.3: Tabla de verdad.

Ejemplo 1.2.5

Sean las proposiciones:

1. p: 13 *es un número primo.*
2. q: 15 *es un número compuesto.*

¿Cuál es la proposición $p \vee q$*?, ¿es verdadera la proposición* $p \vee q$*?*

Solución.

$p \vee q$: $\underbrace{13 \text{ es un número primo}}_{V}$ *o* $\underbrace{15 \text{ es un número compuesto.}}_{V}$

Usando la tabla de verdad 1.3, $p \vee q$ *es verdadera.*

Definición 1.2.4: Disyunción exclusiva

La disyunción exclusiva de p *y* q *está dada por* $p \triangle q$*, y se lee: O* p *o* q*, O bien* p *o bien* q.

p	q	p△q
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Tabla 1.4: Tabla de verdad.

Ejemplo 1.2.6

Sean

$$p : \textit{repruebas matemáticas} \tag{1.1}$$
$$q : \textit{apruebas matemáticas} \tag{1.2}$$

Encontrar valor de verdad de $p\triangle q$.
Solución. *$p\triangle q$: O repruebas o apruebas matemáticas.*
Aplicando la Tabla 1.4, $p\triangle q$ es verdadera, ya que lleva el curso de matemática.

Ejemplo 1.2.7

Sean las proposiciones:

1. *p: Pedro está muerto.*
2. *q: Pedro está vivo.*

¿ Es verdadero $p\triangle q$?
Solución.
$p\triangle q$: O Pedro está muerto o vivo. La proposición $p\triangle q$, es verdadera ya que, una de las proposiciones es negación de la otra.

Definición 1.2.5: Condicional

La condicional de p y q, es dada por $p \longrightarrow q$, y se lee:

Si p *entonces* q
Si p , q
p *es condición suficiente para* q
q *es condición necesaria para* p
q *cuando* p
q *siempre que* p
q *se deduce de* p
q *ya que* p
q *si* p

La tabla del condicional:

p	q	p⟶q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Tabla 1.5: Tabla de verdad.

Ejemplo 1.2.8

- *Paulo aprobará matemática si estudia bastante. Esta proposición es equivalente a: Si Paulo estudia bastante, entonces aprobará matemática.*
- *Una condición necesaria para que Fernanda compre una laptop es que tenga 3505 soles. Es equivalente a la proposición: si Fernanda compra una laptop entonces tiene 3505 soles.*
- *Una condición suficiente para que Luisa lleve el curso de cálculo es que apruebe matemática básica. Esta proposición es lo mismo que, si Luisa aprueba matemática básica, entonces llevará el curso de cálculo.*

Ejemplo 1.2.9

Sean las proposiciones:

1. p: π *es un número racional*
2. q: $\mathbb{I} \subset \mathbb{Q}$

¿es verdadero $p \rightarrow q$*?*

Solución.

$p \rightarrow q$: *Si* $\underbrace{\pi \text{ es un número racional}}_{F}$ *entonces* $\underbrace{\mathbb{I} \subset \mathbb{Q}}_{F}$. *Aplicando* 1.5, $p \rightarrow q$ *es verdadero.*

Definición 1.2.6: Bicondicional

La bicondicional está dada por $p \longleftrightarrow q$, se lee: p si y sólo si q, p es condición necesaria y suficiente para q.

p	q	p⟷q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Tabla 1.6: Tabla de verdad.

Ejemplo 1.2.10

Sean las proposiciones:

1. p: $2 < 5$
2. q: $-15 < -6$

¿es verdadero $p \leftrightarrow q$?

Solución.

$p \leftrightarrow q$: $\underbrace{2 < 5}_{V}$ *si y sólo si* $\underbrace{-15 < -6}_{V}$.

Usando la tabla 1.6, la proposición $p \leftrightarrow q$, es verdadero.

Las tablas de verdad de las proposiciones pueden ser tautología, contingencia o contradicción. La tautología se le llama a aquel proposición que contiene todas las entradas verdaderas, en cambio la contradicción contiene todas falsas y la contingencia contiene por lo menos, un verdadero y un falso.

Ejemplo 1.2.11

Encontrar la tabla de verdad de la proposición:

$$(p \longrightarrow r)\triangle(q \longleftrightarrow p) \tag{1.3}$$

Solución.

El $2^{N^\circ \text{de proposiciones}} = 2^3$, representa la cantidad entradas en cada columna de la tabla verdad. Luego, completamos la tabla como se observa a continuación

p	q	r	$(p$	$\longrightarrow$	$r)$	$\triangle$	$(q$	$\longleftrightarrow$	$p)$
V	V	V	V	V	V	F	V	V	V
V	V	F	V	F	F	V	V	V	V
V	F	V	V	V	V	V	F	F	V
V	F	F	V	F	F	F	F	F	V
F	V	V	F	V	V	V	V	F	F
F	V	F	F	V	F	V	V	F	F
F	F	V	F	V	V	F	F	V	F
F	F	F	F	V	F	F	F	V	F

Tabla 1.7: Tabla de verdad.

Ésta tabla es contingencia ya que, contiene verdaderos y falsos.

Definición 1.2.7: La contrapositiva y la recíproca

La contrapositiva *de la proposición $p \longrightarrow q$, es la proposición $\sim q \longrightarrow \sim p$.*
La recíproca *de la proposición $p \longrightarrow q$, es la proposición $q \longrightarrow p$.*

Definición 1.2.8

La condicional $\hat{p} \longrightarrow \hat{q}$, es implicación lógica si, su tabla de verdad es tautología. La notación $\hat{p} \Longrightarrow \hat{q}$, denota implicación lógica.

Ejemplo 1.2.12

¿La proposición

$$\sim (p \triangle q) \longrightarrow (p \longleftrightarrow q) \tag{1.4}$$

es implicación lógica?
Solución. *Encontremos la tabla de verdad:*

p	q	$\sim$	$(p\triangle q)$	$\longrightarrow$	$(p \longleftrightarrow q)$
V	V	V	F	V	V
V	F	F	V	V	F
F	V	F	V	V	V
F	F	V	F	V	V

Tabla 1.8: Tabla de verdad.

La tabla es tautología,

$$\therefore \quad \sim (p \triangle q) \Longrightarrow (p \longrightarrow q)$$

Definición 1.2.9

La bicondicional $\hat{p} \longleftrightarrow \hat{q}$, es equivalencia lógica si, su tabla de verdad es tautología. La notación $\hat{p} \equiv \hat{q}$ o $\hat{p} \Longleftrightarrow \hat{q}$, denotan equivalencia lógica.

Ejemplo 1.2.13

¿La proposición

$$(r \vee p) \longleftrightarrow \{[(p \longrightarrow q) \wedge r] \vee p\} \tag{1.5}$$

es equivalencia lógica?
Solución.

p	q	r	$(r \vee p)$	$\longleftrightarrow$	$\{[(p \longrightarrow q)$	$\wedge$	$r]$	$\vee$	$p\}$
V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	F	F	V	V
V	F	V	V	V	F	F	V	V	V
V	F	F	V	V	F	F	F	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V	V	F
F	V	F	F	V	V	F	F	F	F
F	F	V	V	V	V	V	V	V	F
F	F	F	F	V	V	F	F	F	F

Tabla 1.9: Tabla de verdad.

Consecuentemente,

$$\therefore\ (r \vee p) \equiv \{[(p \longrightarrow q) \wedge r] \vee p\}$$

Teorema 1.2.1

Para todas las proposiciones p y q, se cumple:

$$\boxed{p \longrightarrow q \equiv \sim q \longrightarrow \sim p} \tag{1.6}$$

Teorema 1.2.2: Leyes proposicionales:

LP-1) Idempotencia:

$$\boxed{p \wedge p \equiv p} \qquad \boxed{p \vee p \equiv p} \tag{1.7}$$

LP-2) Conmutativa:

$$\boxed{p \wedge q \equiv q \wedge p} \qquad \boxed{p \vee q \equiv q \vee p} \tag{1.8}$$

LP-3) Asociativa:

$$\boxed{p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r} \qquad \boxed{(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)} \tag{1.9}$$

LP-4) Distributiva:

$$\boxed{p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)} \qquad \boxed{(p \wedge q) \vee r \equiv (p \vee r) \wedge (q \vee r)} \tag{1.10}$$

LP-5) Absorción:

$$\boxed{p \wedge (p \vee q) \equiv p} \qquad \boxed{p \vee (p \wedge q) \equiv p} \tag{1.11}$$

LP-6) De Morgan:

$$\boxed{\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q} \qquad \boxed{\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q} \tag{1.12}$$

LP-7) Doble negación:

$$\boxed{\sim (\sim p) \equiv p} \tag{1.13}$$

LP-8) Condicional:

$$\boxed{p \longrightarrow q \equiv \sim p \vee q} \tag{1.14}$$

LP-9) Bicondicional:

$$\boxed{p \longleftrightarrow q \equiv (p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow p)} \tag{1.15}$$

LP-10) Diferencia simétrica:

$$\boxed{p \triangle q \equiv \sim (p \longleftrightarrow q)} \tag{1.16}$$

LP-11) Identidad:

$$\boxed{p \wedge V \equiv p} \tag{1.17}$$

$$\boxed{p \wedge F \equiv F} \tag{1.18}$$

$$\boxed{p \vee V \equiv V} \tag{1.19}$$

$$\boxed{p \vee F \equiv p} \tag{1.20}$$

LP-12) Complemento:

$$\boxed{\sim p \vee p \equiv V} \tag{1.21}$$

$$\boxed{\sim p \wedge p \equiv F} \tag{1.22}$$

Ejemplo 1.2.14

Simplificar: $(p \wedge \sim r) \vee [\sim q \longrightarrow \sim (p \wedge r)]$

Solución.

$$\begin{aligned}
(p \wedge \sim r) \vee [\sim q \longrightarrow \sim (p \wedge r)] &\equiv (p \wedge \sim r) \vee [\sim (\sim q) \vee \sim (p \wedge r)] && \textit{por LP8)} \\
&\equiv (p \wedge \sim r) \vee q \vee \sim p \vee \sim r && \textit{por LP7) y LP6)} \\
&\equiv [(p \wedge \sim r) \vee \sim r] \vee q \vee \sim p && \textit{por LP2) y LP3)} \\
&\equiv \sim r \vee q \vee \sim p && \textit{por LP5)}
\end{aligned}$$

Ejemplo 1.2.15: Simplificar:

$$R = \{[(\sim p \wedge \sim q) \vee p \vee q] \wedge [(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q) \vee p]\} \wedge \sim q \tag{1.23}$$

Solución. *Aplicando Teorema 1.2.2,*

$$\begin{aligned}
R &= \{[(\sim p \wedge \sim q) \vee p \vee q] \wedge [(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q) \vee p]\} \wedge \sim q \\
&\equiv \{[\sim (p \vee q) \vee (p \vee q)] \wedge [(p \wedge q) \vee (\sim q \vee p)]\} \wedge \sim q && \text{por LP5) y LP6)} \\
&\equiv \{[V \wedge [((p \wedge q) \vee p) \vee \sim q]\} \wedge \sim q && \text{por LP3) y LP12)} \\
&\equiv [V \wedge (p \vee \sim q)] \wedge \sim q && \text{por LP5)} \\
&\equiv (p \vee \sim q) \wedge \sim q && \text{por LP11)} \\
&\equiv \sim q && \text{por LP5)}
\end{aligned}$$

Ejemplo 1.2.16: Demostrar:

$$p \longrightarrow (q \wedge r) \equiv (p \longrightarrow q) \wedge (p \longrightarrow r) \tag{1.24}$$
$$p \longrightarrow (q \vee r) \equiv (p \longrightarrow q) \vee (p \longrightarrow r) \tag{1.25}$$

Solución. *Determinemos las tablas de verdad:*

p	q	r	p	$\longrightarrow$	$(q \wedge r)$	$(p \longrightarrow q)$	$\wedge$	$(p \longrightarrow r)$
V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	V	F	F
V	F	V	V	F	F	F	F	V
V	F	F	V	F	F	F	F	F
F	V	V	F	V	V	V	V	V
F	V	F	F	V	F	V	V	V
F	F	V	F	V	F	V	V	V
F	F	F	F	V	F	V	V	V

Tabla 1.10: Tabla de verdad.

Como $p \longrightarrow (q \wedge r)$ y $(p \longrightarrow q) \wedge (p \longrightarrow r)$ son equivalentes, entonces queda mostrado la primera afirmación.
De forma similar se verifica la otra afirmación.

Ejemplo 1.2.17

Considere $p \wedge q \wedge r \equiv F$. Pruebe que la proposición

$$R = [(\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee r)] \longrightarrow (r \wedge \sim p),$$

es simplificado a $p \vee q \vee r$.

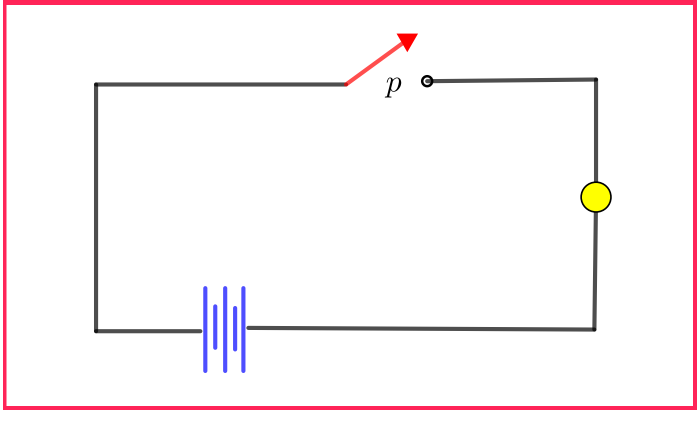
Solución.

$$
\begin{aligned}
R &= [(\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee r)] \longrightarrow (r \wedge \sim p) & \\
&\equiv \sim [(\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee r)] \vee (r \wedge \sim p) & \textit{por LP8)} \\
&\equiv (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim r) \vee (r \wedge \sim p) & \textit{por LP6)} \\
&\equiv (p \wedge \sim q) \vee [((q \wedge \sim r) \vee r) \wedge ((q \wedge \sim r) \vee \sim p)] & \textit{por LP4)} \\
&\equiv (p \wedge \sim q) \vee [(q \vee r) \wedge (q \vee \sim p) \wedge (\sim r \vee \sim p)] & \textit{por LP4)} \\
&\equiv (p \wedge \sim q) \vee [(q \vee r) \wedge \sim (p \wedge \sim q) \wedge (\sim r \vee \sim p)] & \textit{por LP6)} \\
&\equiv (p \wedge \sim q) \vee [(q \vee r) \wedge (\sim r \vee \sim p)] & \textit{por LP4)} \\
&\equiv [(p \wedge \sim q) \vee q \vee r] \wedge [(p \wedge \sim q) \vee (\sim r \vee \sim p)] & \textit{por LP4)} \\
&\equiv (p \vee q \vee r) \wedge (\sim q \vee \sim r \vee \sim p) & \textit{por LP4)} \\
&\equiv (p \vee q \vee r) \wedge \sim (p \wedge q \wedge r) & \textit{por LP6)} \\
&\equiv (p \vee q \vee r) \wedge \sim F & \textit{por hipótesis} \\
&\equiv p \vee q \vee r & \textit{por LP11)}
\end{aligned}
$$

1.3. Circuitos lógicos

Un circuito eléctrico esta formado por interruptores que permiten paso o obstrucción de corriente.

Figura 1.1: No hay paso de corriente



En la figura 1.1, se observa que no hay paso de corriente hacia el foco de color amarillo porque el interruptor p, se encuentra abierto y por lo tanto p, es falso. En cambio en la figura 1.2, si existe un paso de corriente y logra encender el foco de color amarillo, en este interruptor p es considerado como verdadero.

Circuito en serie:

Los circuitos en series son equivalentes a la conjunción.

Figura 1.2: Si hay paso de corriente.

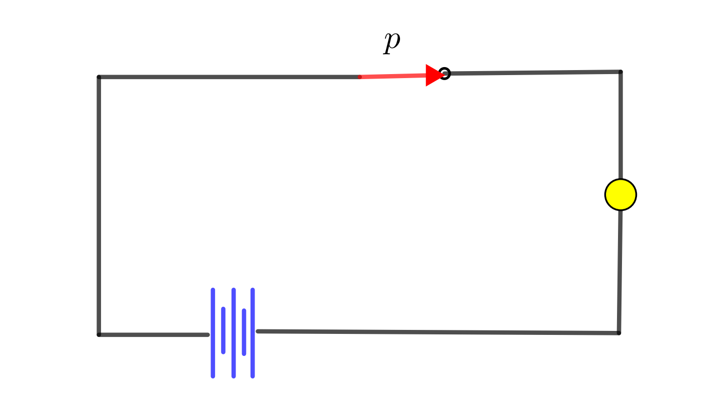
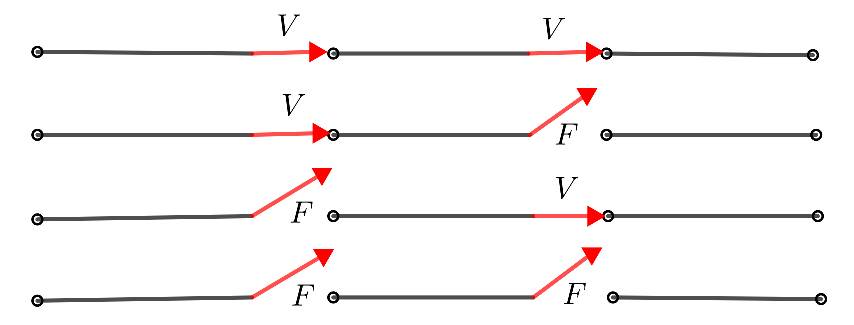


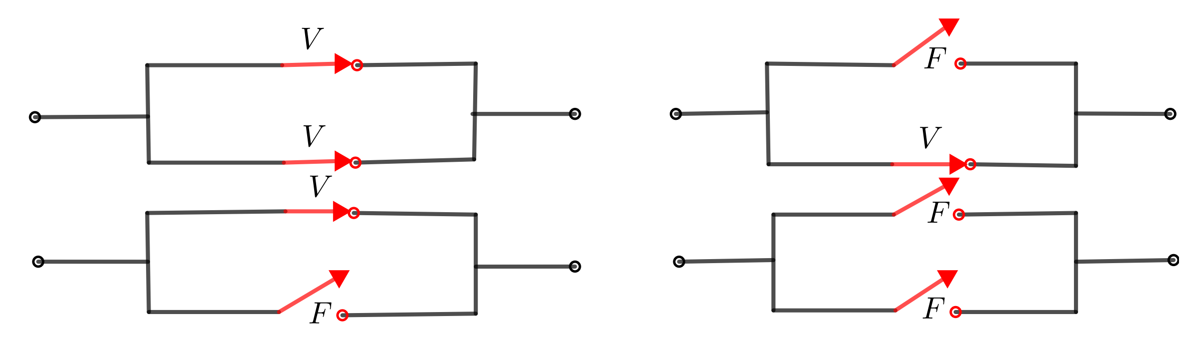
Figura 1.3: Circuito en serie.



Circuito en paralelo:

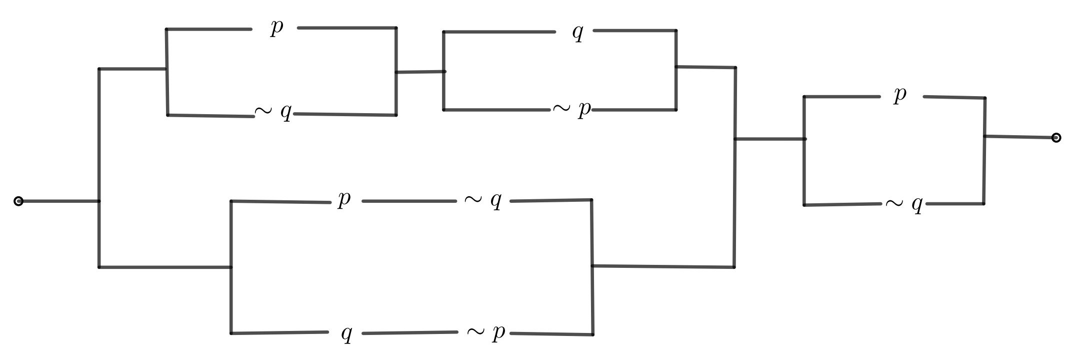
Los circuitos en paralelo son equivalentes a la disyunción inclusiva.

Figura 1.4: Circuito en paralelo



Ejemplo 1.3.1: Simplificar:

Figura 1.5: Circuito.

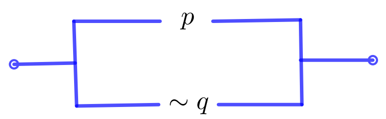


Solución. *Escribiendo en lenguaje simbólico y simplificando tenemos:*

$$\begin{aligned} C =&\{[(p \vee \sim q) \wedge (q \vee \sim p)] \vee [(p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)]\} \wedge (p \vee \sim q) \\ \equiv&\{[(p \vee \sim q) \wedge (q \vee \sim p)] \vee \sim [(p \vee \sim q) \vee (q \vee \sim p)]\} \wedge (p \vee \sim q) \\ \equiv& V \wedge (p \vee \sim q) \\ \equiv& p \vee \sim q \end{aligned}$$

Por lo tanto, el circuito se simplifica a:

Figura 1.6: Circuito simplificado.



Definición 1.3.1: Inferencia lógica

Una inferencia lógica es una condicional:

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_k) \longrightarrow q \qquad (1.26)$$

donde:

IL1) $p_1, p_2, \ldots, p_k$ *son proposiciones llamadas premisas y*

IL2) q *es llamada conclusión.*

Una inferencia lógica de tipo (1.26), es válida si, su condicional es tautología. Si en caso que no fuera tautología, es falacia.
La inferencia lógica (1.26), está denotada también de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rl} & p_1 \\ & p_2 \\ & \vdots \\ & p_k \\ \hline \therefore & q \end{array}$$

A continuación, tenemos algunas inferencias válidas utilizadas frecuentemente.

Inferencia válida:

LV1) Ley de modus ponendo ponens.- es un método de obtención de la consecuencia mediante la afirmación del antecedente.

$$[(p \longrightarrow q) \wedge p] \Longrightarrow q \tag{1.27}$$

En notación simbólica:

$$\begin{array}{rl} & p \longrightarrow q \\ & p \\ \hline \therefore & q \end{array}$$

Ejemplo 1.3.2

P_1: *Si Andrés gana la beca, entonces viajará a Francia.*

P_2: *Andrés gana la beca.*

¿Qué se puede concluir a partir de las premisas? Aplicando la ley LV1) se concluye, Andrés viajará a Francia.

Inferencia válida:

LV2) Ley del modus tollendo tollens.- es el método de negar (el antecedente) mediante la negación (del consecuente).

$$[(p \longrightarrow q) \wedge \sim q] \Longrightarrow (\sim p) \tag{1.28}$$

Notación simbólica:

$$\begin{array}{rl} & p \longrightarrow q \\ & \sim q \\ \hline \therefore & \sim p \end{array}$$

Ejemplo 1.3.3

P_1: *Si Andrés gana la beca, entonces viajará a Francia.*

P_2: *Andrés no viajó a Francia.*

De las proposiciones P_1 y P_2 y aplicando la ley LV2), se concluye que, Andrés no ganó la beca.

Ejemplo 1.3.4

P_1: *Si es un día feriado, me quedaré en casa.*

P_2: *No estoy en casa.*

La premisas P_1 y P_2, implican que, no es un día feriado.

Inferencia válida:

LV3) Ley del silogismo hipotético.

$$[(p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow r)] \Longrightarrow (p \longrightarrow r) \tag{1.29}$$

Notación simbólica:

$$\begin{array}{rl} & p \longrightarrow q \\ & q \longrightarrow r \\ \hline \therefore & p \longrightarrow r \end{array}$$

Ejemplo 1.3.5

P_1 : *Si no aprueba matemática básica entonces llevará de nuevo el curso.*

P_2 : *Si lleva de nuevo el curso entonces tendrá que estudiar de nuevo el próximo semestre.*

Considerando válidas las premisas P_1 y P_2, y aplicando la ley LV3), por lo tanto, si no aprueba matemática básica, tendrá que estudiar de nuevo el próximo semestre.

Inferencia válida:

LV4) Ley del silogismo disyuntivo

$$[(p \vee q) \wedge (\sim p)] \Longrightarrow q$$

Notación símbolica:

$$\begin{array}{rl} & p \vee q \\ & \sim p \\ \hline \therefore & q \end{array}$$

Ejemplo 1.3.6

P_1: *Diego tiene un perro o un gato.*

P_2: *Diego no tiene perro.*

Usando P_1 y P_2, y por ley LV4), resulta que Diego tiene un gato.

Inferencia válida:

LV5) Ley de dilema constructivo

$$[(p \longrightarrow q) \wedge (r \longrightarrow s) \wedge (p \vee r)] \Longrightarrow (q \vee s)$$

Notación simbolica:

$$\begin{array}{rl} & p \longrightarrow q \\ & r \longrightarrow s \\ & p \vee r \\ \hline \therefore & q \vee s \end{array}$$

Ejemplo 1.3.7

P_1: *Si Fernando expone su trabajo entonces tendrá una buena calificación.*

P_2: *Si Mariana no llega a tiempo, se quedará sin ver la exposición.*

P_3: *Fernando expone su trabajo o Mariana no llegó a tiempo.*

Por lo tanto, Fernando tendrá una buena calificación o Mariana se quedará sin ver la exposición, ya que vale LV5).

Inferencia válida:

LV6) Ley de simplificación

$$p \wedge q \Longrightarrow p \qquad\qquad p \wedge q \Longrightarrow q$$

Notación simbolica:

$$\begin{array}{rl} & p \\ & q \\ \hline \therefore & p \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rl} & p \\ & q \\ \hline \therefore & q \end{array}$$

Ejemplo 1.3.8

P: *Algunos estudiantes de UNAP son responsables y puntuales.*

Por lo tanto, algunos estudiantes de UNAP son responsable.

Inferencia válida:

LV7) Ley de adición

$$p \Longrightarrow (p \vee q)$$

Notación simbolica:

$$\begin{array}{rl} & p \\ \hline \therefore & p \vee q \end{array}$$

Ejemplo 1.3.9

P: Los futbolistas son indisciplinados.

Por lo tanto, los futbolistas son indisciplinados o disciplinados.

Ejemplo 1.3.10

Demostrar que la inferencia lógica

$$\begin{array}{rl} & p \longrightarrow q \\ & r \longrightarrow s \\ & p \vee r \\ \hline \therefore & q \vee s \end{array}$$

es válida.

Solución.

Por el método abreviado:

$$\underbrace{(p \longrightarrow q)}_{V} \wedge \underbrace{(r \longrightarrow s)}_{V} \wedge \underbrace{p \vee r}_{V} \longrightarrow \underbrace{(q \vee s)}_{F}$$

Siendo $q \vee s \equiv F$ tenemos $q \equiv F$ y $s \equiv F$; usando la primera premisa $p \longrightarrow q \equiv V$ se obtiene $p \equiv F$, ya que $q \equiv F$. Como la segunda premisa $r \longrightarrow s \equiv V$, da $r \equiv F$, puesto que $s \equiv F$. Tomando la premisa $p \vee r \equiv V$ con $r \equiv F$ se tiene $p \equiv V$. Consecuentemente, p toma V y F. Por lo tanto, la inferencia lógica es válida.

Por el método de tabla de verdad:

p	q	r	s	$(p \longrightarrow q)$	$\wedge$	$(r \longrightarrow s)$	$\wedge$	$(p \vee r)$	$\longrightarrow$	$(q \vee s)$
V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	V	F	V	F	F	F	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	V	V	V	V	V	V
V	F	V	V	F	F	V	F	V	V	V
V	F	V	F	F	F	F	F	V	V	F
V	F	F	V	F	F	V	F	V	V	V
V	F	F	F	F	F	V	F	V	V	F
F	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
F	V	V	F	V	F	F	F	V	V	V
F	V	F	V	V	V	V	F	F	V	V
F	V	F	F	V	V	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V	V	V	V
F	F	V	F	V	F	F	F	V	V	F
F	F	F	V	V	V	V	F	F	V	V
F	F	F	F	V	V	V	F	F	V	F

Tabla 1.11: Tabla de verdad.

Como la tabla es tautología resulta que la inferencia es válida.

Ejemplo 1.3.11

Se definen: $p * q = (q \longrightarrow \sim p)$ *y* $p \boxdot q = \sim p * \sim q$.
Reducir $R = [(p \boxdot \sim q) \boxdot (\sim p * p)] * p$
Solución. *Tenemos:*

$$p * q = q \longrightarrow \sim p \equiv \sim q \vee \sim p \equiv \sim p \vee \sim q \tag{1.30}$$

$$p \boxdot q = \sim p * \sim q \equiv \sim (\sim p) \vee \sim (\sim q) \equiv p \vee q \tag{1.31}$$

Usando las equivalencias (1.30) y (1.31) obtenemos:

$$\begin{aligned} R &= [(p \boxdot \sim q) \boxdot (\sim p * p)] * p \\ &\equiv [(p \vee \sim q) \boxdot (p \vee \sim p)] * p \\ &\equiv [(p \vee \sim q) \vee V] * p \\ &\equiv V * p \\ &\equiv \sim V \vee \sim p \\ &\equiv \sim p \end{aligned}$$

1.4. Lógica cuantificacional

Las cantidades todos o existen desempeñan un papel muy importante para definir proposiciones.

Ejemplo 1.4.1

1. *Él es un médico.*
2. $x - 2y$ *es menor que* 1.

Los enunciado enumerados son abiertos y no son proposiciones ya que dependen del valor de pronombre él y valores de las variables x *e* y*. Sin embargo, dando valores a las variables es posible definir una proposición.*

Definición 1.4.1: Función proposicional

Es una frase u oración que contiene una cantidad finita de variables y se convierte en una proposición cuando se reemplaza valores específicos a las variables.

Definición 1.4.2: Dominio de una variable de función proposicional

Es el conjunto de todos los valores sustituibles a la variable. Denotamos el dominio con la letra D.

Ejemplo 1.4.2

Considere $P(x) : x^2 - x > 0$, *con* $D = \{0, 1, 2, 3\}$. *¿$P(x)$ es una función proposicional?*

Solución.

$$\begin{aligned} P(0) &: 0^2 - 0 > 0 \text{ o } 0 > 0 \text{ falso} \\ P(1) &: 1^2 - 1 > 0 \text{ o } 0 > 0 \text{ falso} \\ P(2) &: 2^2 - 2 > 0 \text{ o } 2 > 0 \text{ verdadero} \\ P(3) &: 3^2 - 3 > 0 \text{ o } 6 > 0 \text{ verdadero} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $P(x)$ *si es una función proposicional.*

Ejemplo 1.4.3

Sea $D = \{\text{Bolivia}, \text{Lima}, \text{Perú}, \text{Argentina}, \text{Mongolia}\}$ *dominio de la variable* x *y sea* $Q(x)$*:* x *es un país. ¿ $Q(x)$ es una función proposicional ?*

Solución.

$$\begin{aligned} Q(\text{Bolivia}) &: \text{Bolivia es un país } (verdadero) \\ Q(\text{Lima}) &: \text{Lima es un país } (falso) \\ Q(\text{Perú}) &: \text{Perú es un país } (verdadero) \\ Q(\text{Argentina}) &: \text{Argentina es un país } (verdadero) \\ Q(\text{Mongolia}) &: \text{Mongolia es un país } (verdadero) \end{aligned}$$

Por consiguiente, $Q(x)$ *es una función proposicional.*

Definición 1.4.3: El conjunto verdad

Sea $P(x)$ una función proposicional y D dominio de la variable x. El conjunto de verdad de $P(x)$, es el conjunto de todos los elementos de D tal que $P(x)$ es verdadero cuando x toma valor. Denotamos $CV[P(x)]$ conjunto de verdad y

$$CV[P(x)] := \{x \in D/P(x) \equiv V\}. \tag{1.32}$$

Ejemplo 1.4.4

Determine el $CV[P(x)]$, donde $P(x)$: x es un número primo y $D = \{1, 3, 4, 5, 7, 9, 11, 15, 21, 22, 27, 29\}$.

Solución.

$$CV[P(x)] = \{3, 5, 7, 11, 29\}$$

El cuantificador universal:$\forall$

"Para todo", "para cada", "para un arbitrario", "para cualquier", "para cada una",..., son cuantificador universal $\forall$

Ejemplo 1.4.5

Sea H el conjunto de todos los seres humanos entonces se tiene la proposición:

$$\forall x \in H, x \text{ es mortal.} \tag{1.33}$$

Esta proposición se lee: para toda x, en el conjunto de todos los seres humanos, x es mortal.

Definición 1.4.4

Sea $P(x)$ una función proposicional y x tiene dominio D. Una proposición universal(PU) es una proposición de la forma:

$$\forall x \in D, P(x) \tag{1.34}$$

PU es verdadero si y sólo si $P(x)$ es verdadera para toda $x \in D$.
PU es falsa si y sólo si $P(x)$ es falso para al menos un x en D.

Ejemplo 1.4.6

Sea $D = \{0, 1, 3, 7, 9\}$ y considere la proposición universal

$$\forall x \in D, x^3 \geq x^2 \tag{1.35}$$

¿Es una proposición verdadera?

Solución.

Sea $P(x) : x^3 \geq x^2$. *Entonces:*

$$\begin{aligned} P(0) :& 0^3 \geq 0^2 \text{ (verdadero)} \\ P(1) :& 1^3 \geq 1^2 \text{ (verdadero)} \\ P(3) :& 3^3 \geq 3^2 \text{ (verdadero)} \\ P(7) :& 7^3 \geq 7^2 \text{ (verdadero)} \\ P(9) :& 9^3 \geq 9^2 \text{ (verdadero)} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $[\forall x \in D, x^3 \geq x^2]$ *es verdadera.*

Ejemplo 1.4.7

Considere la proposición universal

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^3 \geq x^2 - x \tag{1.36}$$

¿Es una proposición falsa?
Solución.
Sea $Q(x) : x^3 \geq x^2 - x$. *Tome* $x = -2$, *en seguida se tiene*

$$Q(-2) : (-2)^3 \geq (-2)^2 - (-2) \text{ o } -8 \geq 6 \text{ (Falso)} \tag{1.37}$$

Por consiguiente, $[\forall x \in \mathbb{R}, x^3 \geq x^2 - x]$ *es falsa.*

El cuantificador existencial:∃

"Existe", "hay una", "se puede encontrar una", "hay al menos una", "para alguna", "por lo menos una"... son cuantificadores existenciales.

Ejemplo 1.4.8

Considere $\mathbb{Z}$, *el conjunto de números enteros.*

$$\exists x \in \mathbb{Z} \text{ tal que } x \text{ es menor que } 13 \tag{1.38}$$

Esta proposición se lee: hay un número entero que es menor que 13.

Definición 1.4.5

Sea $P(x)$ *una función proposicional y* x *tiene dominio* D. *Una proposición existencial(PE) es una proposición de la forma:*

$$\exists x \in D, \text{ tal que } P(x) \tag{1.39}$$

PE es verdadero si y sólo si $P(x)$ *es verdadera para al menos un* $x \in D$.
PE es falsa si y sólo si $P(x)$ *es falso para todo* x *en* D.

Ejemplo 1.4.9

Considere la proposición existencial

$$\exists m \in \mathbb{Z}^+ \text{ tal que } m^m = m. \tag{1.40}$$

¿Es verdadero la proposición existencial?
Solución.
La proposición existencial es verdadera pues, existe $m = 1 \in \mathbb{Z}^+$ tal que $1^1 = 1$.

Ejemplo 1.4.10

Considere la proposición existencial

$$\exists m \in \Omega \text{ tal que } m^2 = 2m. \tag{1.41}$$

con $\Omega = \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ¿Es verdadero la proposición existencial?
Solución.
Sea $P(m) : m^2 = 2m$. Entonces

$$\begin{aligned}
P(1) &: 1^2 = 2(1) \text{ (falso)}\\
P(3) &: 3^2 = 2(3) \text{ (falso)}\\
P(4) &: 4^2 = 2(4) \text{ (falso)}\\
P(5) &: 5^2 = 2(5) \text{ (falso)}\\
P(6) &: 6^2 = 2(6) \text{ (falso)}\\
P(7) &: 7^2 = 2(7) \text{ (falso)}\\
P(8) &: 8^2 = 2(8) \text{ (falso)}\\
P(9) &: 9^2 = 2(9) \text{ (falso)}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $[\exists m \in \Omega \text{ tal que } m^2 = 2m]$ es falsa.

Definición 1.4.6: Proposición condicional universal

$$\forall x, \text{ si } P(x), \text{ entonces } Q(x) \tag{1.42}$$

Ejemplo 1.4.11

Considere

$$\forall x \in \mathbb{R}, \text{ si } x > 3 \text{ entonces } x^2 > 9. \tag{1.43}$$

Es una proposición condicional universal. Para $x < 3$, con $x \in \mathbb{R}$, el antecedente de la proposición (1.43) es falsa por lo cual dicha proposición es verdadera. Para $x > 3$, la proposición (1.43) es siempre verdadera. Por lo tanto, $[\forall x \in \mathbb{R}, x > 3 \longrightarrow x^2 > 9]$, es verdadera.

Teorema 1.4.1

$$\sim [\forall x \in D, P(x)] \equiv \exists x \in D \text{ tal que } \sim P(x) \tag{1.44}$$

Demostración. *Ejercicio para el lector.*

Teorema 1.4.2

$$\sim [\exists x \in D, \text{ tal que } P(x)] \equiv \forall x \in D, \sim P(x) \tag{1.45}$$

Demostración. *Ejercicio para el lector.*

Ejemplo 1.4.12

Consideremos

P: $\forall$ *número real* x, x *es racional.*

Q: $\exists$ *un triángulo* T *tal que la suma de los ángulos de* T *es igual a* 290^o.

Determine las negaciones.
Solución.

$\sim P$: *existe un número real* x *tal que* x *es no racional*
$\sim Q$: *para todo triángulo* T, *la suma de los ángulos de* T, *no es igual a* $290°$

Teorema 1.4.3

$$\sim [\forall x, P(x) \longrightarrow Q(x)] \equiv \exists x \text{ tal que } P(x) \text{ y } \sim Q(x) \tag{1.46}$$

Demostración. *Queda como ejercicio para el lector.*

Ejemplo 1.4.13

Consideremos

P: $\forall$ *número entero* n, *si* n *par entonces* n^4 *es par.*

Q: *Si el cuadrado de un número entero es impar, entonces el entero es impar.*

Determine las negaciones.
Solución. *En símbolos tenemos:*

$$\begin{aligned} P &: \forall n \in \mathbb{Z}, n \text{ es par } \longrightarrow n^4 \text{ es par} \\ Q &: \forall n \in \mathbb{Z}, n^2 \text{ es impar } \longrightarrow n \text{ es impar} \end{aligned}$$

sus negaciones son:

$$\begin{aligned} \sim P &: \exists n \in \mathbb{Z} \text{ tal que } n \text{ es par y } n^4 \text{ no es par} \\ \sim Q &: \exists n \in \mathbb{Z} \text{ tal que } n^2 \text{ es impar y } n \text{ no es impar} \end{aligned}$$

Cuantificadores múltiples

Proposiciones de dos variables:

$$\forall x \text{ en } D,\ \exists y \text{ en } E \text{ tal que } P(x,y) \tag{1.47}$$

$$\exists x \text{ en } D \text{ tal que } \forall y \text{ en } E,\ P(x,y) \tag{1.48}$$

Los cuantificadores para todo y existe no conmutan.

Negaciones:

$$\sim [\forall x \text{ en } D,\ \exists y \text{ en } E \text{ tal que } P(x,y)] \equiv \exists x \text{ en } D \text{ tal que } \forall y \text{ en } E, \sim P(x,y) \tag{1.49}$$

$$\sim [\exists x \text{ en } D \text{ tal que } \forall y \text{ en } E,\ P(x,y)] \equiv \forall x \text{ en } D,\ \exists y \text{ en } E \text{ tal que } \sim P(x,y) \tag{1.50}$$

Ejemplo 1.4.14

Considere las siguientes proposiciones:

1. $\forall x$ *en* D, $\exists y$ *en* E *tales que* $x+y=1$.
2. $\exists x$ *en* D *tal que* $\forall y$ *en* E, $x+2y=0$.

Tome en cuenta $D=E=\{-2,-1,0,1,2\}$. *Determine las negaciones y sus valores de verdad.*

Solución.

1. $\sim [\forall x$ *en* D, $\exists y$ *en* E *tales que* $x+y=1] \equiv [\exists x$ *en* D *tal que* $\forall y$ *en* E, $x+y\neq 1]$.
   Existe $x_0=-2$ *en* D *tales que*
   $$x_0+(-2)\neq 1(V), x_0+(-1)\neq 1(V), x_0+0\neq 1(V), x_0+2\neq 1(V).$$
   Por lo tanto, $\exists x$ *en* D *tal que* $\forall y$ *en* E, $x+y\neq 1$ *es una proposición verdadera.*

2. $\sim [\exists x$ *en* D *tal que* $\forall y$ *en* E, $x+2y=0] \equiv [\forall x$ *en* D, $\exists y$ *en* E *tal que* $x+2y\neq 0]$.
   Para dada x *en* D, *existe un* y *en* E *con* $y\neq \dfrac{x}{2}$ *tal que* $x+2y\neq 0$.
   Por lo tanto, $\forall x$ *en* D, $\exists y$ *en* E *tal que* $x+2y\neq 0$ *es una proposición verdadera.*

1.5. Ejercicios propuestos

Tarea para casa:

✍1. Verifique en cada una de las proposiciones si es tautología, contradicción o contingencia(consistencia).

a) $(p \wedge q) \longrightarrow (\sim p \vee q)$

b) $\sim [(p \wedge q \wedge r) \longleftrightarrow (\sim r \wedge q)]$

c) $[(p \vee q) \wedge r] \longrightarrow [(p \wedge r) \longrightarrow \sim q]$

d) $q \longleftrightarrow (p \wedge r) \longleftrightarrow (p \longrightarrow \sim r) \longleftrightarrow q$

e) $[p \longrightarrow (p \wedge r)] \longleftrightarrow (p \longrightarrow \sim r) \longleftrightarrow \sim q$

f) $\{[(p \wedge q \wedge r) \vee t] \wedge q\} \longleftrightarrow [(p \longrightarrow \sim r) \vee \sim t]$

g) $\{[(p \wedge \sim q \wedge r) \vee t] \vee (q \wedge \sim t)\} \longleftrightarrow [(p \longrightarrow \sim r) \vee (\sim t \wedge r) \vee \sim q]$

h) $\{[(p \vee \sim q) \wedge t] \wedge (q \wedge \sim t)\} \longleftrightarrow [(p \vee r) \vee (t \wedge \sim r) \vee \sim q]$

✍2. Simplificar las siguientes proposiciones:

a) $(\sim p \wedge \sim r) \vee \{[\sim q \longrightarrow \sim (p \wedge r)] \vee \sim q\}$

b) $\sim [\sim (p \vee q) \longrightarrow \sim q] \longleftrightarrow (p \longrightarrow q)$

c) $\sim \{[p \wedge (q \vee \sim r \vee s \vee p)] \longrightarrow [p \vee (p \wedge r)]\} \longrightarrow (r \wedge s \wedge \sim t)$

d) $\{[p \wedge q \wedge (p \vee q)] \vee [r \wedge (\sim r \vee q) \wedge p]\} \wedge \{[\sim p \vee q \vee \sim q \vee \sim (p \vee q)] \longrightarrow [r \wedge p \wedge (\sim r \vee q)]\}$

e) $p \vee [\{[(p \wedge q) \vee r] \wedge r\} \wedge \{[(p \vee q \vee r) \wedge (p \vee q)] \vee r\}]$.

f) $[(\sim q \longrightarrow \sim p) \wedge \sim (\sim p \longrightarrow \sim q)] \vee [p \longrightarrow \sim q]$

g) $[\sim (p \wedge \sim q) \longrightarrow (\sim p \vee r)] \wedge \sim [\sim q \longrightarrow \sim p]$

h) $\{[\sim (q \longrightarrow p) \longrightarrow \sim (p \longrightarrow q)] \wedge (p \longrightarrow \sim q)\} \vee \sim q$.

i) $(p \vee q \vee r) \wedge (p \vee t \vee \sim q) \wedge (p \vee \sim t \vee r)$

j) $\sim (p \longrightarrow \sim s) \wedge \{[(\sim r \vee q) \longrightarrow p] \wedge (p \longrightarrow s) \wedge (t \longrightarrow s)\}$

k) $\sim (\sim p \longrightarrow \sim r) \vee \{[(\sim r \vee q) \longrightarrow p] \vee [(p \longrightarrow s) \wedge (\sim t \longrightarrow s)]\}$

✍3. Si se cumplen $p * q = p \longrightarrow (p \wedge q)$ y $p \boxdot q = \sim p * q$, reducir

$$R = \{(p \boxdot \sim q) * [(q * p) \boxdot p]\} * (p \vee \sim q)$$

✍4. Pruebe las siguientes equivalencias:

a) $(p \vee q) \longrightarrow r \equiv (p \longrightarrow r) \wedge (q \longrightarrow r)$

b) $p \longrightarrow (q \vee r) \equiv (p \longrightarrow q) \vee (p \longrightarrow r)$

c) $p \longrightarrow (q \vee r \vee s) \equiv (p \longrightarrow q) \vee (p \longrightarrow r) \vee (p \longrightarrow s)$

d) $p \longrightarrow (q \wedge r) \equiv (p \longrightarrow q) \wedge (p \longrightarrow r)$

e) $p \longrightarrow (q \wedge r \wedge s) \equiv (p \longrightarrow q) \wedge (p \longrightarrow r) \wedge (p \longrightarrow s)$

$f)$ $p \longleftrightarrow (q \longleftrightarrow r) \equiv (p \longleftrightarrow q) \longleftrightarrow r$

✍**5.** Determinar si las siguientes inferencias son válidas o son falacias:

$a)$
$$\begin{array}{ll} & \sim q \longrightarrow \sim p \\ & r \longrightarrow s \\ & p \vee r \\ \hline \therefore & q \vee s \end{array}$$

$b)$
$$\begin{array}{ll} & \sim q \vee \sim p \\ & r \wedge s \\ & p \vee r \\ \hline \therefore & q \vee \sim s \end{array}$$

$c)$
$$\begin{array}{ll} & \sim q \vee \sim p \\ & r \longrightarrow \sim s \\ & p \wedge r \\ \hline \therefore & q \wedge \sim s \end{array}$$

$d)$
$$\begin{array}{ll} & p \longrightarrow q \\ & q \longrightarrow r \\ & r \longrightarrow s \\ & s \longrightarrow t \\ \hline \therefore & p \longrightarrow t \end{array}$$

$e)$
$$\begin{array}{ll} & (p \vee r) \longrightarrow \sim q \\ & r \longrightarrow s \\ & (s \vee \sim r) \longrightarrow p \\ & s \longrightarrow q \\ \hline \therefore & r \longrightarrow t \end{array}$$

$f)$
$$\begin{array}{ll} & \sim p \longleftrightarrow q \\ & (r \longrightarrow \sim p) \wedge (s \longrightarrow q) \\ & t \longrightarrow (r \wedge s) \\ & (w \wedge \sim t) \longrightarrow q \\ \hline \therefore & p \longrightarrow \sim w \end{array}$$

✍**6.** Determine si es válida o no las siguientes inferencias:

$a)$ Fernanda es más baja que Luciana si Fernando es más alto que David. Fernanda no es más baja que Luciana. Si Fernando y Marko tienen la misma estatura, entonces Fernando es más alto que David. Por lo tanto, Fernando y Marko no tienen la misma estatura.

$b)$ La luz está encendida, si y sólo si hay fluido eléctrico a la vez que hay alguien en casa. Si no hay alguien en casa, o los de casa fueron a pasear o han ido a cine. Los de casa han ido a cine si fueron a pasear. Por consiguiente, si hay fluido eléctrico entonces no es el caso que hayan ido a cine y la luz esté encendida.

$c)$ Si el contagio es el principal problema de la educación, entonces muchos niños no irán a la escuela a menos que el estado vacune a los niños. No es el caso que si mejora el nivel de la enseñanza, el contagio no sea el principal problema de la educación. Pero muchos niños irán a la escuela si mejora el nivel de la enseñanza. En consecuencia, el estado vacuna a los niños si y sólo si mejora el nivel de la enseñanza.

d) Si el consumo de gas sigue en aumento entonces o bien, la importación de gas aumentará o las reservas nacionales de gas se agotan, entonces con el tiempo la nación se irá a la quiebra. Por lo tanto, la nación con el tiempo se irá a quiebra ya que, el consumo de gas continúa aumentando.

✍**7.** En cada circuito construir un circuito simplificado equivalente al circuito:

Figura 1.7: Circuito 1

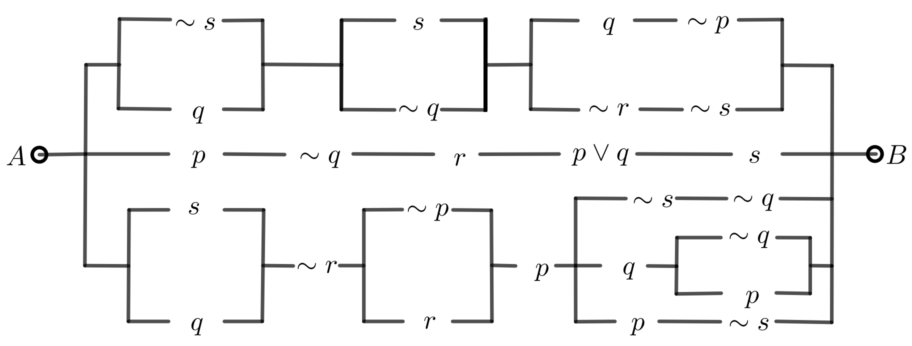
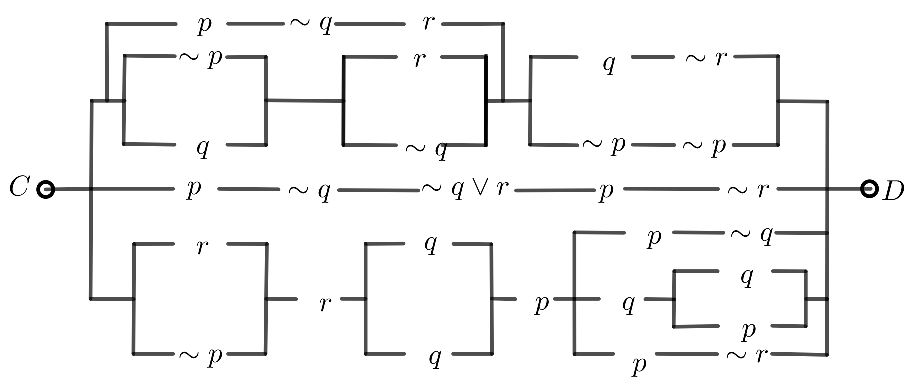


Figura 1.8: Circuito 2



✍**8.** Sea $P(x, y)$ una función proposicional dada por: Si $x < y$, entonces $x^2 < y^2$ con el dominio de x e y en el conjunto de números reales $\mathbb{R}$.

a) Explique por qué $P(x, y)$ es falso si $x = -4$ y $y = 2$.

b) Explique por qué $P(x, y)$ es verdadero si $x = 4$ y $y = 5$.

✍**9.** Considere $D = \{-34, -12, 0, 2, 3, 4, 15, 18, 20, 34, 54\}$. Determine cuáles de los siguientes enunciados son verdaderos y cuáles son falsos.

a) $\forall x \in D$, si x es impar, entonces $x > 0$.

b) $\forall x \in D$, si x es menor que -1 entonces x es par.

c) $\exists x \in D$ tal que $x > 54$.

d) $\forall x \in D$, si el dígito de las unidades de x es 2, entonces el dígito de las decenas es 3 o 5.

✍**10.** Considere $H = \{-24, -22, -10, -8, -4, -2, 0, 4, 8, 12, 16, 24, 23, 28, 36\}$. Determine cuáles de los siguientes enunciados son verdaderos y cuáles son falsos.

a) $\forall x \in H$, si x es múltiplo de 2, entonces $x > 0$ o $x < 0$.

b) $\forall x \in H$, si x es mayor que 0, entonces x es divisible por 4.

c) $\exists x \in H$ tal que $x \leq -4$.

d) $\forall x \in H$, si el dígito de las decenas de x es 2, entonces el dígito de las unidades es 2 o 4.

✍**11.** Los dominios de x e y, es el mismo conjunto de números reales. Determine el valor de verdad de cada afirmación siguiente:

a) $\forall x, \forall y,\ x < y \longrightarrow x^2 < y^2$

b) $\exists x, \forall y,\ x < y \longrightarrow x^2 < y^2$

c) $\forall x, \exists y,\ x < y \longrightarrow x^2 < y^2$

d) $\forall x, \exists y,\ x^2 + y^2 = 4$

e) $\exists x,\ \exists y,\ x^2 + y^2 = 4$

f) $\forall x,\ \forall y,\ x^2 + y^2 = 4$

✍**12.** Los dominios de x e y es el mismo conjunto de números reales. Determine valor de verdad de cada una de las siguientes proposiciones:

a) Para cada x, para cada y, $x^2 < y + 4$.

b) Para cada y, para alguna x, $x^2 < y + 4$.

c) Para cada x, para cada y, si $x < y$ entonces $x^4 < y^4$.

d) Para cada x, para alguna y, si $x < y$ entonces $x^4 < y^4$.

e) Para alguna x, para cada y, si $x < y$ entonces $x^4 < y^4$.

f) Para alguna x, para alguna y, si $x < y$ entonces $x^4 < y^4$.

✍**13.** Negar las siguientes proposiciones:

a) Todos los estudiantes son de derecha radical.

b) Uno de mis amigos no tiene licenciatura.

c) O bien llega a tiempo o se retrasa algunos minutos.

d) Los alumnos no lograron aprobar matemática ni estadística.

e) Si los puneños son inteligentes y puntuales entonces son exitosos.

f) Condición y necesaria para que el número $\overline{abcde}$ sea divisible por 25, es $\overline{de}$, es múltiplo de 25 o $d = e = 0$.

g) Si 20 es mayor que 10 y 2 es menor que 8, entonces 20 es menor que 180.

h) $\forall x \in \mathbb{R},$ si $x^2 \geq 1$ entonces $x > 0$

i) $\forall x \in \mathbb{Z},$ si $8/x$ es un entero, entonces $x = 4$

j) $\forall x \in M, \ \exists y \in M,$ tal que $x + 3y = 2$

k) $\forall x > 0, \ \exists \varepsilon > 0,$ tal que $|x| < \varepsilon$

l) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, siempre que $|x - y| < \delta$.

m) $\forall x, \forall y \in M, \ \exists z \in M,$ tal que $x - 8y = 2z$

n) $\forall x \in M, \ \exists y \in M, \ \forall z \in M$ tal que $, 5x + y - 2z = -6$

ñ) $\forall \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists \eta > 0$ tal que si $|x| < \eta \wedge |y| < \varepsilon$ entonces $|x + y| < \varepsilon \wedge |x - y| < \delta$

2

Conjuntos

El objetivo de este capítulo, es explicar al estudiante la teoría de conjuntos y sus propiedades. La teoría ampliada de conjuntos se puede encontrar en los libros clásicos [12, 20, 26]. Otras buenas referencias sobre conjuntos puede ser [10, 13].

2.1. Pertenencia y conjuntos numéricos

Definición 2.1.1

Un conjunto es una colección de objetos. Estos objetos son denominados elementos del conjunto.

Relación de pertenencia:

$$x \in A \text{ se lee: } x \text{ “\textit{pertenece al conjunto}” } A \tag{2.1}$$

$$x \notin A \text{ se lee: } x \text{ “\textit{no pertence al conjunto}” } A \tag{2.2}$$

Ejemplo 2.1.1

Considere el conjunto

$$A = \{\bigoplus, \coprod, \int, \Cap, \boxplus, \divideontimes, \spadesuit, \circledS\} \tag{2.3}$$

Se observa que $\bigoplus \in A$ *y* $\bigotimes \notin A$*.*

Conjunto se determina por:

C1. Extensión, cuando se presenta cada uno de sus elementos.

C2. Comprensión, cuando se presenta en forma abreviada.

Ejemplo 2.1.2

Considere el siguiente conjunto

$$A = \{x/x = (-1)^k + 2k, k \in \mathbb{Z}\} \tag{2.4}$$

Determinar por extensión.
Solución.

$$\begin{array}{ll}
(-1)^0 + 2(0) = 1 + 0 = 1 & (-1)^{-1} + 2(-1) = -1 - 2 = -3 \\
(-1)^1 + 2(1) = -1 + 2 = 1 & (-1)^{-2} + 2(-2) = 1 - 4 = -3 \\
(-1)^2 + 2(2) = 1 + 4 = 5 & (-1)^{-3} + 2(-3) = -1 - 6 = -7 \\
(-1)^3 + 2(3) = -1 + 6 = 5 & (-1)^{-4} + 2(-4) = 1 - 8 = -7 \\
\vdots \qquad\qquad \vdots & \vdots \qquad\qquad \vdots
\end{array}$$

Consecuentemente,

$$A = \{\ldots, -11, -7, -3, 1, 5, 9, 13, \ldots\}.$$

Conjuntos numéricos:

CN1. Números naturales:

$$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\} \tag{2.5}$$

CN2. Números enteros:

$$\mathbb{Z} := \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\} \tag{2.6}$$

Enteros positivos y negativos:

$$\mathbb{Z}^+ : \;=\; \{1, 2, 3, \ldots\} \tag{2.7}$$

$$\mathbb{Z}^- : \;=\; \{\ldots, -3, -2, -2, -1\} \tag{2.8}$$

CN3. Números racionales:

$$\mathbb{Q} := \{\frac{r}{s}/r, s \in \mathbb{Z}, s \neq 0\} \tag{2.9}$$

CN4. Números irracionales:

$$\mathbb{I} := \{x/x \text{ tiene representación decimal infinita no periódica}\} \tag{2.10}$$

CN5. Números reales:

$$\mathbb{R} := \{x/x \in \mathbb{Q} \vee x \in \mathbb{I}\} \tag{2.11}$$

CN6. Números complejos:

$$\mathbb{C} := \{x + iy/x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\} \tag{2.12}$$

Conjuntos especiales:

CE1. Vacío o nulo, está definido por:

$$\emptyset = \{x/x \neq x\} \tag{2.13}$$

CE2. Unitario, consta de un solo elemento.

CE3. Universal, es un conjunto que contiene todos los elementos.

Ejemplo 2.1.3

Considere los siguientes conjuntos

$$A_1 = \{x \in \mathbb{R}/x^2 + 9 = 0\}, A_2 = \{x \in \mathbb{C}/x^2 + 9 = 0\} \tag{2.14}$$

¿Cuál(es) de los conjuntos es vacío?
Solución.

$$x^2 \geq 0 \Longrightarrow x^2 + 9 \geq 9 > 0 \Longrightarrow A_1 = \{\}$$
$$x^2 + 9 = 0 \Longrightarrow (x + 3i)(x - 3i) = 0 \Longrightarrow x = -3i \vee x = 3i \Longrightarrow A_2 = \{-3i, 3i\}$$

Ejemplo 2.1.4

Sea $A = \{x \in \mathbb{Z}/x^4 - 16 = 0\}$. *¿Es A un conjunto unitario?*
Solución.

$$x^4 - 16 = 0 \Longrightarrow (x^2 - 4)(x^2 + 4) = 0 \Longrightarrow (x - 2)(x + 2) = 0 \Longrightarrow x = 2 \vee x = -2$$

Por lo tanto, $A = \{-2, 2\}$ *no es un conjunto unitario.*

Ejemplo 2.1.5

Considere los conjuntos: $B = \{x/x \text{ es un número primo par}\}$ *y* $D = \{x/x \text{ es un satélite natural de la tierra }\}$. *¿$B$ y D son conjuntos unitarios?*
Solución. *La respuesta es, que si son conjuntos unitarios pues, el conjunto B tiene un sólo elemento a 2 como par primo y el conjunto D, también tiene un sólo elemento a la luna como satélite natural de la tierra.*

Ejemplo 2.1.6

Considere

$$\begin{aligned} U &= \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\} \\ A &= \{x \in \mathbb{Z}/1 < x^2 < 26\} \\ B &= \{x \in \mathbb{Z}^+/(-1)^x = -1\} \\ C &= \{x \in \mathbb{Z}/x^3 + 4x^2 + x - 6 = 0\} \end{aligned} \tag{2.15}$$

¿El conjunto U, es un conjunto universal de A, B y C?
Solución.

Por extensión:

$$
\begin{aligned}
A &= \{-5,-4,-3,-2,2,3,4,5\} \\
B &= \{1,3,5,7,\ldots\} \\
C &= \{1,-2,-3\}
\end{aligned}
\tag{2.16}
$$

La respuesta es que U, no es un conjunto universal de A, B y C. En cambio $\mathbb{Z}$, si es un conjunto universal de A, B y C.

2.2. Igualdad de conjuntos

Definición 2.2.1: Igualdad de conjuntos

$$
\begin{aligned}
A = B &\Longleftrightarrow (\forall x, x \in A \Longrightarrow x \in B) \wedge (\forall x, x \in B \Longrightarrow x \in A) \\
A \neq B &\Longleftrightarrow (\exists x \text{ tal que } x \in A \text{ y } x \notin B) \vee (\exists x \text{ tal que } x \in B \text{ y } x \notin A)
\end{aligned}
$$

Ejemplo 2.2.1

Considere

$$A = \{5,55,555,55,5,5555,55\}, B = \{5,55,5,5555,555\}$$

¿$A = B$?

Solución.

Ambos son el mismo conjunto $\{5,55,555,5555\}$.

Teorema 2.2.1: Propiedades de igualdad de conjuntos

1. $A = A$ *(Reflexiva)*
2. $A = B \Longrightarrow B = A$ *(Simétrica)*
3. $A = B \wedge B = C \Longrightarrow A = C$ *(Transitiva)*

Demostración. *Ejercicio.*

Definición 2.2.2: Conjuntos equivalentes

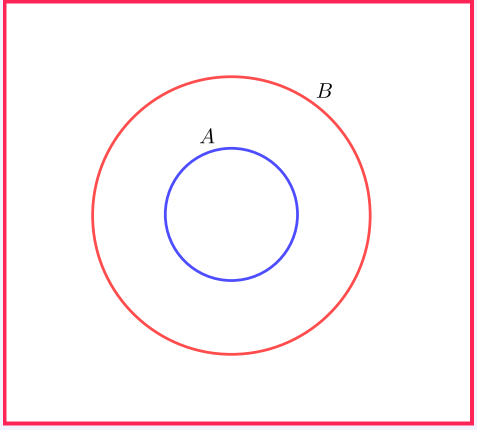
$$A \equiv B \Longleftrightarrow \exists \text{ una correspondencia biunívoca entre } A \text{ y } B \tag{2.17}$$

Definición 2.2.3: Subconjunto

$$A \subset B \quad \Longleftrightarrow (\forall x, x \in A \Longrightarrow x \in B) \tag{2.18}$$

$$A \not\subset B \quad \Longleftrightarrow (\exists x \in A \text{ tal que } x \notin B) \tag{2.19}$$

Figura 2.1: Subconjunto



Teorema 2.2.2: Propiedades de inclusión

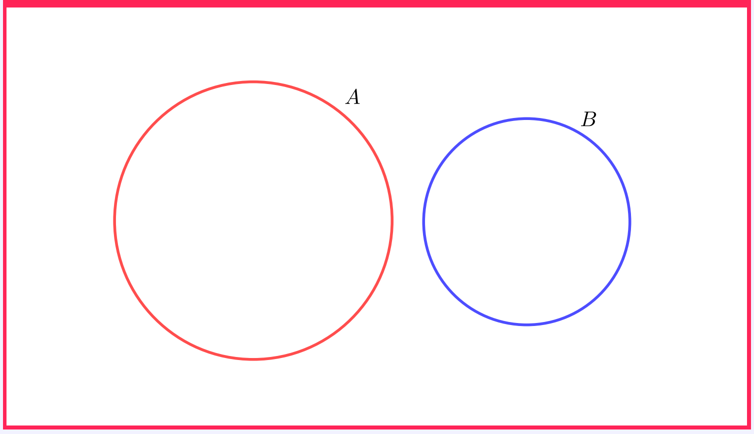
1. $A \subset A, \forall A$
2. $A \subset B \wedge B \subset A \Longrightarrow A = B$
3. $\forall A, \emptyset \subset A$

Demostración.

Definición 2.2.4: Conjuntos disjuntos

$$A \text{ y } B \text{ son } \textit{disjuntos} \iff \textit{no tienen elementos en común} \tag{2.20}$$

Figura 2.2: Disjuntos



Ejemplo 2.2.2

Los conjuntos $\mathbb{Z}^+$ *y* $\mathbb{Z}^-$ *son disjuntos pues, los conjuntos*

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}^+ &= \{1, 2, 3, \ldots, \},\\ \mathbb{Z}^- &= \{-1, -2, -3, \ldots, \}\end{aligned}$$

no tienen elementos en común.

Definición 2.2.5: Conjunto de conjuntos

$$\begin{aligned}A \text{ es conjunto de conjuntos } \iff A = \{A_1, A_2, A_3, \ldots\} \text{ con } A_i\\ \text{conjunto para cada } i = 1, 2, 3, \ldots\end{aligned} \tag{2.21}$$

Ejemplo 2.2.3

Considere los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned}H_1 &= \{x/x \text{ es un estudiante de EP de farmacia }\}\\ H_2 &= \{x/x \text{ es un estudiante de EP de enfermeria }\}\\ H_3 &= \{x/x \text{ es un estudiante de EP de ingeniería mecánica }\}\\ H_4 &= \{x/x \text{ es un estudiante de EP de artes }\}\\ H_5 &= \{x/x \text{ es un estudiante de EP de veterinaria }\}\end{aligned}$$

El conjunto $\{H_1, H_2, H_3, H_4, H_5\}$*, es un ejemplo de conjunto de conjuntos.*

Definición 2.2.6: Conjunto potencia

Sea A *un conjunto. Un* conjunto potencia *de* A *está definido por:*

$$\mathcal{P}(A) := \{X/X \subset A\} \tag{2.22}$$

$$X \in \mathcal{P}(A) \iff X \subset A \tag{2.23}$$

Teorema 2.2.3: Propiedades

1. $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$
2. $A \in \mathcal{P}(A)$
3. $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$
4. $A \subset B \iff \mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$

Demostración.

1. $\emptyset \subset A \Longrightarrow \emptyset \in \mathcal{P}(A)$.
2. $A \subset A \Longrightarrow A \in \mathcal{P}(A)$

3.

$$\begin{aligned} X \in \mathcal{P}(\emptyset) &\iff X \subset \emptyset \\ &\iff X = \emptyset \\ &\iff X \in \{\emptyset\} \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} X \in \mathcal{P}(A) &\Longrightarrow X \subset A \\ &\Longrightarrow X \subset B, \text{ pues } A \subset B \\ &\Longrightarrow X \in \mathcal{P}(B) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X \in A &\Longrightarrow \{X\} \subset A \\ &\Longrightarrow \{X\} \in \mathcal{P}(A) \\ &\Longrightarrow \{X\} \in \mathcal{P}(B), \text{ ya que } \mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B) \\ &\Longrightarrow \{X\} \subset B \\ &\Longrightarrow X \in B \end{aligned}$$

Ejemplo 2.2.4

Considere $A = \{a, b, c, d\}$. *Determine* $\mathcal{P}(A)$.

Solución.

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(A) = &\{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,d\}, \{b,c\}, \{b,d\}, \{c,d\}, \{a,b,c\}, \{a,b,d\}, \\ &\{b,c,d\}, \{a,c,d\}, \{a,b,c,d\}, \emptyset\} \end{aligned}$$

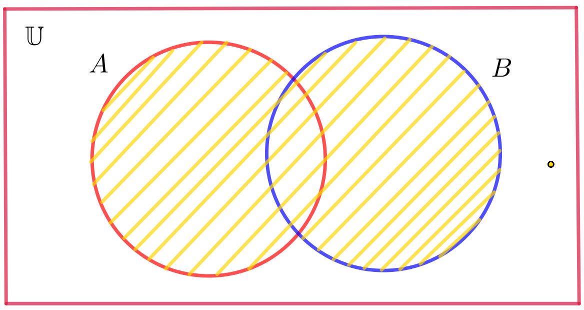
2.3. Operaciones entre conjuntos

Definición 2.3.1: Unión

$$A \cup B := \{x / x \in A \vee x \in B\} \tag{2.24}$$

$$x \in A \cup B \iff x \in A \vee x \in B \tag{2.25}$$

Figura 2.3: Unión de conjuntos



Ejemplo 2.3.1

Sean los conjuntos:

$$\begin{aligned} A =&\{*, \oplus, \Box, \ominus, \otimes, \not<, \nleq, \oslash\} \\ B =&\{\otimes, \oslash, \uplus, \equiv, \odot, \Box, \nabla, \sim\} \end{aligned}$$

Hallar $A \cup B$.

Solución.

$$A \cup B = \{*, \oplus, \Box, \ominus, \otimes, \not<, \nleq, \oslash, \uplus, \equiv, \odot, \nabla, \sim\}$$

Teorema 2.3.1: Propiedades

1. $A \cup A = A$
2. $A \cup \emptyset = A$
3. $A \cup \mathbb{U} = \mathbb{U}$
4. $A \cup B = B \cup A$
5. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
6. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
7. $A \subset A \cup B$, $\forall A$, $B \subset A \cup B$, $\forall B$
8. $A \cup B = \emptyset \iff A = \emptyset \wedge B = \emptyset$
9. $A \subset B \implies A \cup C \subset B \cup C$
10. $A \subset B \iff A \cup B = B$

Demostración.

1.
$$\begin{aligned} x \in A \cup A &\iff x \in A \vee x \in A \\ &\iff x \in A \end{aligned}$$

2. *Como* $x \in \emptyset \equiv F$ *entonces*
$$\begin{aligned} x \in A \cup \emptyset &\iff x \in A \vee x \in \emptyset \\ &\iff x \in A \end{aligned}$$

3. *Siendo* $A \subset \mathbb{U}$, *resulta que*
$$\begin{aligned} x \in A \cup \mathbb{U} &\implies x \in A \vee x \in \mathbb{U} \\ &\implies x \in \mathbb{U} \vee x \in \mathbb{U} \\ &\implies x \in \mathbb{U} \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} x \in \mathbb{U} &\implies x \in \mathbb{U} \vee x \in A \\ &\implies x \in \mathbb{U} \cup A \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} x \in A \cup B &\iff x \in A \vee x \in B \\ &\iff x \in B \vee x \in A \\ &\iff x \in B \cup A \end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned} x \in (A \cup B) \cup C &\iff (x \in A \vee x \in B) \vee x \in C \\ &\iff x \in A \vee (x \in B \vee x \in C) \\ &\iff x \in A \cup (B \cup C) \end{aligned}$$

6. *Usando 1, $A = A \cup A$, y aplicando asociativa y conmutativa obtenemos*

$$\begin{aligned} x \in A \cup (B \cup C) &\iff x \in A \vee x \in (B \cup C) \\ &\iff x \in A \vee (x \in B \vee x \in C) \\ &\iff x \in (A \cup A) \vee (x \in B \vee x \in C) \\ &\iff (x \in A \vee x \in A) \vee (x \in B \vee x \in C) \\ &\iff (A \cup B) \cup (B \cup C) \end{aligned}$$

7.

$$\begin{aligned} x \in A &\Longrightarrow x \in A \vee x \in B \\ &\Longrightarrow x \in A \cup B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \in B &\Longrightarrow x \in B \vee x \in A \\ &\Longrightarrow x \in A \cup B \end{aligned}$$

8. *Aplicando 7, y las hipótesis tenemos*

$$\begin{aligned} A \subset A \cup B = \emptyset &\Longrightarrow A = \emptyset \\ B \subset A \cup B = \emptyset &\Longrightarrow B = \emptyset \end{aligned}$$

Supongamos que $A = \emptyset$ y $B = \emptyset$. Entonces

$$A \cup B = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$$

9.

$$\begin{aligned} x \in A \cup C &\Longrightarrow x \in A \vee x \in C \\ &\Longrightarrow x \in B \vee x \in C \text{ ya que } A \subset B \\ &\Longrightarrow x \in B \cup C \end{aligned}$$

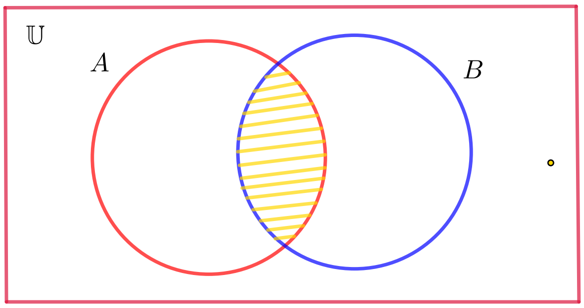
10. *Usando 7, $B \subset A \cup B$. Por hipótesis $A \subset B$, y por 9 se tiene $A \cup B \subset B \cup B = B$. Por lo tanto, $A \cup B = B$.*
Recíprocamente, supongamos que $A \cup B = B$. Entonces aplicando 7 se obtiene $A \subset A \cup B = B$.

Definición 2.3.2: Intersección

$$A \cap B := \{x/x \in A \wedge x \in B\} \tag{2.26}$$

$$x \in A \cap B \Longleftrightarrow x \in A \wedge x \in B \tag{2.27}$$

Figura 2.4: $A \cap B$



Ejemplo 2.3.2

Sean los conjuntos $A = \{m, n, l, k, g, h, i, u, v, p, e, w, q\}$ *y* $B = \{s, t, m, n, k, u, v, z, p, e, c, s, d, b, x\}$. *Hallar* $A \cap B$.

Solución.

$$A \cap B = \{m, n, k, u, v, p, e\}$$

Teorema 2.3.2: Propiedades

1. $A \cap A = A$
2. $A \cap \emptyset = \emptyset$
3. $A \cap \mathbb{U} = A$
4. $A \cap B = B \cap A$
5. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
6. $A \cap B \subset A$ y $A \cap B \subset B$
7. $A \subset B \Longrightarrow A \cap C \subset B \cap C$
8. $A \subset C \wedge B \subset D \Longrightarrow A \cap B \subset C \cap D$
9. $A \subset B \Longleftrightarrow A \cap B = A$
10. $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$

Demostración.

1.

$$\begin{aligned} x \in A \cap A &\Longleftrightarrow x \in A \wedge x \in A \\ &\Longleftrightarrow x \in A \end{aligned}$$

2. *Supongamos que* $A \cap \emptyset \neq \emptyset$. *Entonces existe* $x_0 \in A \cap \emptyset$. *De donde,* $x_0 \in A$ *y* $x_0 \in \emptyset$, *esto es una contradicción. Por consiguiente,* $A \cap \emptyset = \emptyset$.

3. *Como* $x \in \mathbb{U} \equiv V$, *entonces*

$$\begin{aligned} x \in A \cap \mathbb{U} &\iff x \in A \cap x \in \mathbb{U} \\ &\iff x \in A \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} x \in A \cap B &\iff x \in A \wedge x \in B \\ &\iff x \in B \wedge x \in A \\ &\iff x \in B \cap A \end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned} x \in (A \cap B) \cap C &\iff x \in (A \cap B) \wedge x \in C \\ &\iff (x \in A \wedge x \in B) \wedge x \in C \\ &\iff x \in A \wedge (x \in B \wedge x \in C) \\ &\iff x \in A \wedge x \in B \cap C \\ &\iff x \in A \cap (B \cap C) \end{aligned}$$

6. *Por ley de simplificación:*

$$\begin{aligned} x \in A \cap B &\Longrightarrow x \in A \\ x \in A \cap B &\Longrightarrow x \in B \end{aligned}$$

7. *Supongamos que* $A \subset B$ *entonces:*

$$\begin{aligned} x \in A \cap C &\Longrightarrow x \in A \wedge x \in C \\ &\Longrightarrow x \in B \wedge x \in C \\ &\Longrightarrow x \in B \cap C \end{aligned}$$

8. *Considerando las hipótesis* $A \subset C$ *y* $B \subset D$, *y aplicando 7 tenemos* $A \cap B \subset C \cap B$ *y* $C \cap B \subset D \cap C$. *Luego, por transitiva* $A \cap B \subset C \cap D$.

9. *Aplicando 7, a la hipótesis* $A \subset B$, *se tiene* $A = A \cap A \subset A \cap B$ *y vale* $A \cap B \subset A$ *por 6. Entonces* $A \cap B = A$. *Recíprocamente, supongamos que* $A \cap B = A$ *y por 6,* $A \cap B \subset B$, *obtenemos* $A \subset B$.

10.

$$\begin{aligned} X \in \mathcal{P}(A \cap B) &\Longrightarrow X \subset A \cap B \\ &\Longrightarrow X \subset A \wedge X \subset B \\ &\Longrightarrow X \in \mathcal{P}(A) \wedge X \in \mathcal{P}(B) \\ &\Longrightarrow X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) &\Longrightarrow X \in \mathcal{P}(A) \wedge X \in \mathcal{P}(B) \\ &\Longrightarrow X \subset A \wedge x \subset B \\ &\Longrightarrow X \subset A \cap B \\ &\Longrightarrow X \in \mathcal{P}(A \cap B) \end{aligned}$$

Teorema 2.3.3: Distributiva

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \tag{2.28}$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \tag{2.29}$$

Demostración.

$$\begin{aligned} x \in A \cup (B \cap C) &\iff x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C) \\ &\iff (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C) \\ &\iff x \in (A \cup B) \wedge x \in (A \cup C) \\ &\iff x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ x \in A \cap (B \cup C) &\iff x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C) \\ &\iff (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C) \\ &\iff x \in (A \cap B) \vee x \in (A \cap C) \\ &\iff x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{aligned}$$

Teorema 2.3.4: Absorción

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \tag{2.30}$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \tag{2.31}$$

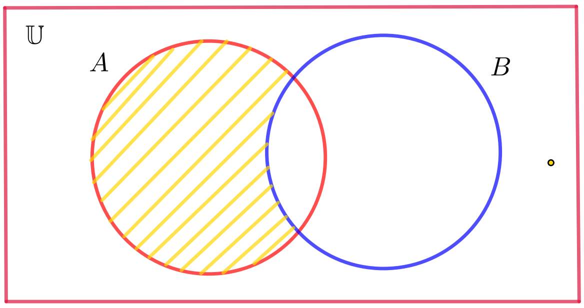
Demostración.

$$\begin{aligned} x \in A \cup (B \cap C) &\iff x \in A \vee x \in (B \cap C) \\ &\iff x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C) \\ &\iff (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C) \\ &\iff x \in (A \cup B) \wedge x \in (A \cup C) \\ &\iff x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ x \in A \cap (B \cup C) &\iff x \in A \wedge x \in (B \cup C) \\ &\iff x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C) \\ &\iff (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C) \\ &\iff x \in (A \cap B) \vee x \in (A \cap C) \\ &\iff x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{aligned}$$

Definición 2.3.3: Diferencia de conjuntos

$$A - B := \{x / x \in A \wedge x \notin B\} \tag{2.32}$$
$$x \in A - B \iff x \in A \wedge x \notin B \tag{2.33}$$

Figura 2.5: $A - B$



Ejemplo 2.3.3

Considere $A = \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 16, 17, 18\}$ *y* $B = \{2, 3, 5, 8, 9, 16, 19, 20, 22, 24\}$. *Calcular* $A - B$.

Solución.

$$A - B = \{1, 4, 6, 7, 10, 11, 13, 14, 17, 18\}$$
$$B - A = \{2, 19, 20, 22, 24\}$$

Teorema 2.3.5: Propiedades

1. $A - A = \emptyset$
2. $A - \emptyset = A$
3. $\emptyset - A = \emptyset$
4. $A - B = (A \cup B) - B = A - (A \cap B)$
5. $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$
6. $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$
7. $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$
8. $(A - B) - C = (A - C) - B$

Definición 2.3.4: Complemento de un conjunto

$$\mathcal{C}_B A := \{x/x \in B \land x \notin A\} \tag{2.34}$$
$$A^C := \{x/x \notin A\} \tag{2.35}$$

Ejemplo 2.3.4

Sean $\mathbb{U} = \{j, m, n, l, o, p, x, l, z, w, h, r\}$, $A = \{m, n, p, o, l, x, z, w\}$ *y* $B = \{m, p, o, s, t, w\}$. *Determinar* $\mathcal{C}_B A$, $\mathcal{C}_A B$ *y* A^C.

Solución.

$$\mathcal{C}_B A = B - A = \{s, t\}$$
$$\mathcal{C}_A B = A - B = \{n, l, x, z\}$$
$$A^C = \mathbb{U} - A = \{j, h, r\}$$

Teorema 2.3.6: Propiedades

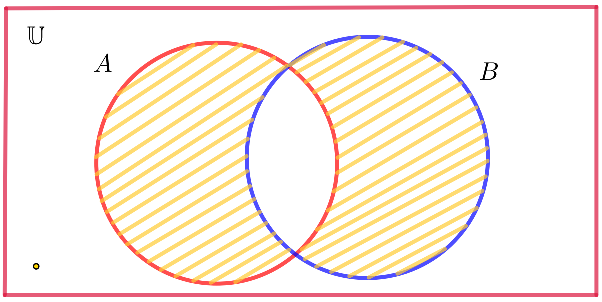
1. $\mathcal{C}_A B \subset A$
2. $\mathcal{C}_B A \subset B$
3. $A \cup A^C = \mathbb{U}$
4. $A \cup \mathcal{C}_A B = A$
5. $A \cap A^C = \emptyset$
6. $A \cap \mathcal{C}_B A = \emptyset$
7. $\mathbb{U}^C = \emptyset$
8. $\mathcal{C}_A A = \emptyset$
9. $\emptyset^C = \mathbb{U}$
10. $\mathcal{C}_A \emptyset = A$
11. $(A^C)^C = A$
12. $\mathcal{C}_B(\mathcal{C}_B A) = A \cap B$
13. $A - B = A \cap B^C$
14. $A - B = A \cap \mathcal{C}_A B$

Demostración. *Ejercicio.*

Definición 2.3.5: Diferencia simétrica

$$A \triangle B := (A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B) \tag{2.36}$$

Figura 2.6: $A\triangle B$



Ejemplo 2.3.5

Sean $A = \{-9,-7,-5,-4,-3,-1,0,2,4,5,6,7,8,9,13,24,65,66,78\}$ *y* $B = \{-8,-3,-1,0,5,13,11,24,45,65,79,88,99,100\}$. *Determinar* $A\triangle B$.

Solución.

$$A\triangle B = \{-9,-8,-7,-5,-4,2,4,6,7,8,9,11,45,66,78,79,88,99,100\}$$

Teorema 2.3.7: Propiedades

1. $A\triangle A = \emptyset$
2. $A\triangle \emptyset = A$
3. $A\triangle B = B\triangle A$
4. $A\triangle(B\triangle C) = (A\triangle B)\triangle C$
5. $A\cap(B\triangle C) = (A\cap B)\triangle(A\cap C)$
6. $(A\triangle B)\cup(B\triangle C) = (A\cup B\cup C) - (A\cap B\cap C)$

Demostración.

1.

$$\begin{aligned} A\triangle A &= (A-A)\cup(A-A) \\ &= \emptyset\cup\emptyset \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} A\triangle\emptyset &= (A-\emptyset)\cup(\emptyset-A) \\ &= A\cup\emptyset \\ &= A \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} A\triangle B &= (A-B)\cup(B-A) \\ &= (B-A)\cup(A-B) \\ &= B\triangle A \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} A\triangle(B\triangle C) &= [A\cap(B\triangle C)^C]\cup[(B\triangle C)\cap A^C] \\ &= [A\cap(B^C\cup C)\cap(C^C\cup B)]\cup[((B\cap C^C)\cup(C\cap B^C))\cap A^C] \\ &= [A\cap((B^C\cap C^C)\cup(C\cap B))]\cup(B\cap C^C\cap A^C)\cup(C\cap B^C\cap A^C) \\ &= (A\cap B^C\cap C^C)\cup(A\cap C\cap B)\cup(B\cap C^C\cap A^C)\cup(C\cap B^C\cap A^C) \\ &= \{[(A\cap B^C)\cup(B\cap A^C)]\cap C^C\}\cup\{[(A\cap B)\cup(A^C\cap B^C)]\cap C\} \\ &= [(A\triangle B)-C]\cup[C\cap(A\triangle B)^C] \\ &= (A\triangle B)\triangle C \end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned} (A\cap B)\triangle(A\cap C) &= [(A\cap B)-(A\cap C)]\cup[(A\cap C)-(A\cap B)] \\ &= [(A\cap B)\cap(A\cap C)^C]\cup[(A\cap C)\cap(A\cap B)^C] \\ &= [(A\cap B)\cap(A^C\cup C^C)]\cup[(A\cap C)\cap(A^C\cup B^C)] \\ &= [(A\cap B)\cap C^C]\cup[(A\cap C)\cap B^C] \\ &= A\cap[(B\cap C^C)\cup(C\cap B^C)] \\ &= A\cap(B\triangle C) \end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned} (A\triangle B)\cup(B\triangle C) &= (A-B)\cup(B-A)\cup(B-C)\cup(C-B) \\ &= [(A\cup C)-B]\cup[B-(A\cap C)] \\ &= [(A\cup C)\cap B^C]\cup[B\cap(A\cap C)^C] \\ &= \{[(A\cup C)\cap B^C]\cup B\}\cap\{[(A\cup C)\cap B^C]\cup(A\cap C)^C\} \\ &= (A\cup B\cup C)\cap(B^C\cup A^C\cup C^C) \\ &= (A\cup B\cup C)-(A\cap B\cap C) \end{aligned}$$

Definición 2.3.6

Sean A y B conjuntos finitos. Se define número de elementos de la unión de los conjuntos A y B, disjuntos:

$$n(A\cup B) := n(A)+n(B) \tag{2.37}$$

Teorema 2.3.8

1. *Si A y B son conjuntos finitos entonces*

$$n(A\cup B) = n(A)+n(B)-n(A\cap B) \tag{2.38}$$

2. *Si A, B y C son conjuntos entonces*

$$n(A\cup B\cup C) = n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(A\cap C)-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C) \tag{2.39}$$

Ejemplo 2.3.6

Dados los conjuntos $A = \{x \in \mathbb{N}/x = 2k - 3, k \in \mathbb{N}\}$, $B = \{x \in \mathbb{N}/2 < x < 10\}$ y $C = \{x \in \mathbb{N}/x^2 - 11x + 24 = 0\}$. Calcular $(A\triangle B) \cap C$

Solución. *Expresemos por extensión:*

$$\begin{aligned} &2(1)-3 = -1 \notin \mathbb{N}, 2(2)-3 = 1 \in \mathbb{N}, 2(3)-3 = 3 \in \mathbb{N}, 2(4)-3 = 5 \in \mathbb{N},\\ &\qquad 2(5)-3 = 7 \in \mathbb{N}, \dots\\ &\qquad A = \{1, 3, 5, \dots\} \end{aligned}$$

$$B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$\begin{aligned} (x-3)(x-8) = 0 &\Longrightarrow x = 3 \vee x = 8\\ C &= \{3, 8\} \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} (A\triangle B) \cap C &= [(A-B) \cup (B-A)] \cap C\\ &= [\{1, 11, 13, \dots\} \cup \{4, 6, 8\}] \cap \{3, 8\}\\ &= \{1, 4, 6, 8, 11, 13, \dots\} \cap \{3, 8\}\\ &= \{8\} \end{aligned}$$

Ejemplo 2.3.7

Considere el conjunto universal $\mathbb{U} = \{\pi, 3, 1, 6, \sqrt{3}, -1, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{5}\}$. Determinar por extensión los siguientes conjuntos:

1. $A = \{x \in \mathbb{U}/x + 8 < 13 \wedge x - 1 > 3\}$
2. $B = \{x \in \mathbb{U}/x^2 > 0 \vee x = 3\}$
3. $C = \{x \in \mathbb{U}/x + 6 = 7 \longrightarrow x - 2 = 1\}$
4. $D = \{x \in \mathbb{U}/x - 1 = 0 \longleftrightarrow x + 1 = 0\}$

Solución.

$\mathbb{U}$	$x+8<13$	$\wedge$	$x-1>3$	$x^2>0$	$\vee$	$x=3$
π	V	F	F	V	V	F
3	V	F	F	V	V	V
1	V	F	F	V	V	F
6	F	F	V	V	V	F
$\sqrt{3}$	V	F	F	V	V	F
-1	V	F	F	V	V	F
$-\frac{2}{3}$	V	F	F	V	V	F
$-\frac{1}{5}$	V	F	F	V	V	F

Tabla 2.1: Tablas de verdad.

$\mathbb{U}$	$x+6=7$	$\longrightarrow$	$x-2=1$	$x-1=0$	$\longleftrightarrow$	$x+1=0$
π	F	V	F	F	V	F
3	F	V	V	F	V	F
1	V	F	F	V	F	F
6	F	V	F	F	V	F
$\sqrt{3}$	F	V	F	F	V	F
-1	F	V	F	F	F	V
$-\frac{2}{3}$	F	V	F	F	V	F
$-\frac{1}{5}$	F	V	F	F	V	F

Tabla 2.2: Tablas de verdad.

Por lo tanto,

$$A = \emptyset$$
$$B = \{\pi, 3, 1, 6, \sqrt{3}, -1, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{5}\}$$
$$C = \{\pi, 3, 6, \sqrt{3}, -1, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{5}\}$$
$$D = \{\pi, 3, 6, \sqrt{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{5}\}$$

Ejemplo 2.3.8

Si $A \subset B$ y $A \cap C = \emptyset$, simplificar

$$R = [B \cup (C - A)] \cap [A \cup (B - C)]$$

Solución. *De hipótesis,* $C - A = C$ *y* $A \cup C^C = C^C$ *y luego*

$$\begin{aligned} R &= [B \cup (C - A)] \cap [A \cup (B - C)] \\ &= (B \cup C) \cap [A \cup (B \cap C^C)] \\ &= (B \cup C) \cap [(A \cup B) \cap (A \cup C^C)] \\ &= [(B \cup C) \cap B] \cap (A \cup C^C) \\ &= B \cap (A \cup C^C) \\ &= B \cap C^C \end{aligned}$$

Ejemplo 2.3.9

Se sabe que $A \subset B$ *y* $B \cap C = \emptyset$.
Simplificar: $R = (C - A) \cup (A - B) \cup \{[(A \cap B)^C - B] \cap C\}$
Solución. *Por hipótesis tenemos:*

$$\begin{aligned} A \subset B &\Longrightarrow A - B = \emptyset \\ A \subset B &\Longrightarrow A \cap C \subset B \cap C = \emptyset \\ &\Longrightarrow A \cap C = \emptyset \end{aligned}$$

Como $A \cap C = \emptyset$, *resulta que* $C - A = C$. *Luego,*

$$\begin{aligned} R &= (C - A) \cup (A - B) \cup \{[(A \cap B)^C - B] \cap C\} \\ &= C \cup \emptyset \cup \{[(A \cap B)^C - B] \cap C\} \\ &= C \cup \{[(A \cap B)^C - B] \cap C\} \\ &= C \end{aligned}$$

Ejemplo 2.3.10

Sea $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. *¿Cuáles de las proposiciones son verdaderas?*

1. $\exists x \in S$ *tal que* $x + 6 \geq 10$
2. $\forall x \in S, \exists y \in S$ *tal que* $x + y \leq 7$
3. $\forall x \in S,\ x + 3 \leq 8$
4. $\exists x \in S$ *tal que* $x + 3 > 6$

Solución.

1. *Sea* $P(x) : x+6 \geq 10$. *Tomando* $x_0 = 5 \in S$ *obtenemos* $P(5) : 5+6 \geq 10 (V)$. *Por lo tanto,* $[\exists x \in S$ *tal que* $x + 6 \geq 10] \equiv V$.
2. *Para todo* $x \in S$, *se cumplen* $1 \leq x \leq 5$ *y* $x \in \mathbb{Z}$. *Considerando* $Q(x, y)$:

$x + y \leq 7$. Entonces:

$$x = 1 \Longrightarrow \exists y = 4 \text{ tal que } 1 + 4 \leq 7(V)$$
$$x = 2 \Longrightarrow \exists y = 5 \text{ tal que } 2 + 5 \leq 7(V)$$
$$x = 3 \Longrightarrow \exists y = 2 \text{ tal que } 3 + 2 \leq 7(V)$$
$$x = 4 \Longrightarrow \exists y = 2 \text{ tal que } 4 + 2 \leq 7(V)$$
$$x = 5 \Longrightarrow \exists y = 1 \text{ tal que } 5 + 1 \leq 7(V)$$

Por consiguiente, $[\forall x \in S, \exists y \in S \text{ tal que } x + y \leq 7] \equiv V$.

3. Sea $T(x) : x + 3 \leq 8$. Entonces

$$T(1) : 1 + 3 \leq 8(V)$$
$$T(2) : 2 + 3 \leq 8(V)$$
$$T(3) : 3 + 3 \leq 8(V)$$
$$T(4) : 4 + 3 \leq 8(V)$$
$$T(5) : 5 + 3 \leq 8(V)$$

Por lo tanto, $[\forall x \in S,\ x + 3 \leq 8] \equiv V$

4. Consideremos $Z(x) : x + 3 > 6$. Entonces tome $x_0 = 5 \in S$ tal que $Z(5) : 5 + 3 > 6(V)$. Por lo tanto, $[\exists x \in S \text{ tal que } x + 3 > 6] \equiv V$.

Ejemplo 2.3.11

Sean $H = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $J = \{-2, -1, 0, 5, 6\}$. Determine valores de verdad de las proposiciones:

1. $\forall x \in H, \exists y \in J \text{ tal que } x + y < 3$
2. $\forall x \in J, \forall y \in H \text{ tal que } x < y \longrightarrow x^2 < y^2$
3. $\exists y \in J, \forall x \in H \text{ tal que } x - y > 1$
4. $\exists! y \in J, \forall x \in H \text{ tal que } x - y > 1$
5. $\exists x \in H, \exists y \in J \text{ tal que } x - y \in H$

Solución.

1. Tomando $x = 5$ tenemos $5 + y < 3$, o sea, $y < -2$. No existe un y en J tal que $5 + y < 3$. Por lo tanto, $[\forall x \in H, \exists y \in J \text{ tal que } x + y < 3] \equiv F$.
2. Consideremos $x_0 = -2 \in J$ y $y_0 = 1 \in H$. Luego, $-2 < 1 \longrightarrow (-2)^2 < 1^2$ falso. Por consiguiente, $[\forall x \in J, \forall y \in H \text{ tal que } x < y \longrightarrow x^2 < y^2] \equiv F$
3. Siendo $x - y > 1$, obtenemos $y < x - 1$. De donde existen $y = -1, -2$ tales que $x - y > 1$, para todo $x \in H$. Consecuentemente, $[\exists y \in J, \forall x \in H \text{ tal que } x - y > 1] \equiv V$.
4. Del resultado anterior se concluye que $[\exists! y \in J, \forall x \in H \text{ tal que } x - y > 1] \equiv F$.

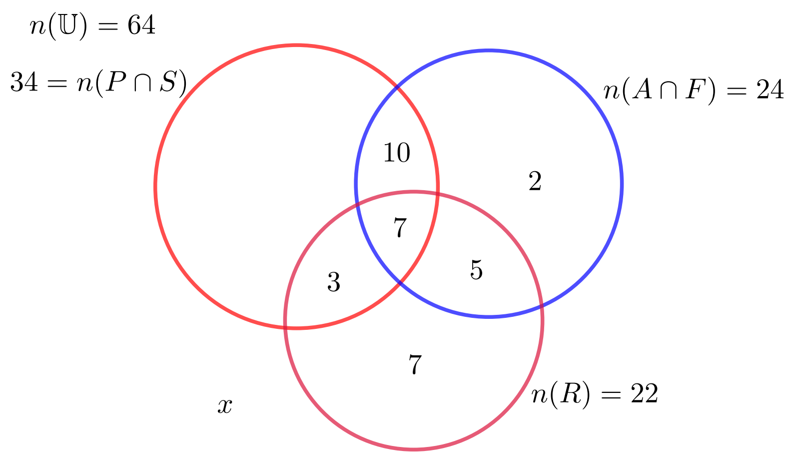
5. *Existen* $x = 2 \in H$ *y* $y = -1 \in J$ *tal que* $2 - (-1) = 3 \in H$. *De donde,* $[\exists x \in H, \exists y \in J$ *tal que* $x - y \in H] \equiv V$.

Ejemplo 2.3.12

En un grupo de 64 señoritas se determinó que 7 eran peruanas, simpáticas, altas, flaquitas y rubias; 34 son peruanas simpáticas, 22 son rubias, 24 son altas flaquitas, 10 son peruanas rubias simpáticas, 17 son peruanas flaquitas altas y simpáticas y 12 son rubias altas y flaquitas. ¿Cuántas de las señoritas no tienen ninguna de las 5 características mencionadas?

Solución. *Los datos del ejercicio son* $n(\mathbb{U}) = 64$, $n(P \cap S \cap A \cap F \cap R) = 7$, $n(P \cap S) = 34$, $n(R) = 22$, $n(A \cap F) = 24$, $n(P \cap R \cap S) = 10$, $n(P \cap F \cap A \cap S) = 17$ *y* $n(R \cap A \cap F) = 12$.

Figura 2.7: $(P \cap S) \cup (A \cap F) \cup R$



$$x + 34 + 7 + 5 + 2 = 64 \Longrightarrow x = 16$$

2.4. Ejercicios propuestos

Tarea para casa:

✍**1.** Considere el conjunto unitario $H = \{s - 2t, 2s - t + 2, 19\}$. Sean $J = \{2s, 9 + t, s - t\}$ y $K = \{12 + t, 7 - s, 3 - t, s + 7\}$. Hallar $(J \cup K) - (J \cap K)$.

✍**2.** Sea el conjunto $A = \{\{1\}, \{1, 2\}, \emptyset, \{\{3, 4\}, 2\}, \{\{\}, 1\}, 3, 5, \{6\}\}$. Señale verdadero o falso en las siguientes afirmaciones:

a) $1 \notin A$ ( )

b) $\{3,4\} \in A$ ( )

c) $\{1,2\} \in A$ ( )

d) $3 \in A$ ( )

e) $\{1,2\} \subset A$ ( )

f) $\{5\} \notin A$ ( )

g) $\{\} \subset A$ ( )

h) $\{6\} \in A$ ( )

i) $\{\{\{3,4\},2\},\emptyset\} \subset A$ ( )

j) $\{\{1\},5,6,\{6\}\} \subset A$ ( )

k) $\{\{1\},\{\{\},1\},\{6\},\{1,2\},\emptyset\} \not\subset A$ ( )

✍**3.** Considere el conjunto universal $\mathbb{U} = \{-7,-6,-5,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,6\}$. Determinar por extensión los siguientes conjuntos:

a) $A = \{x \in \mathbb{U}/2x+3 < 7 \wedge 3x-1 \leq 2\}$

b) $B = \{x \in \mathbb{U}/x^2+3 > 0 \vee 2x-7 = 3\}$

c) $C = \{x \in \mathbb{U}/x+6 \geq 7 \longrightarrow 3x-2 = 1\}$

d) $D = \{x \in \mathbb{U}/x-3 > 0 \longleftrightarrow 3x-5 = 10\}$

e) $E = \{x \in \mathbb{U}/x^2-4 < 0 \longrightarrow (x > 5 \wedge x = -1)\}$

✍**4.** Sean los conjuntos $\mathbb{U} = \{-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,6\}$, $A = \{-3,-2,-1,0\}$ y $B = \{0,1,2,3,4,5,6\}$. Se sabe que

$$S = \{x \in \mathbb{U}/x \notin A \longrightarrow x \notin B\}$$

$$T = \{x \in \mathbb{U}/x \in A \longleftrightarrow x \notin B\}$$

$$R = \{x \in \mathbb{U}/x \in A \vee x \notin B\}$$

Calcular $T \cap S \cap R$.

✍**5.** Sean $A = \{x \in \mathbb{R}/x^3-2x^2-5x+6 = 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R}/x^2-4x+3 = 0\}$ y $C = \{x \in \mathbb{R}/x^2 \leq 0\}$. Hallar:

a) $(A \cup B \cup C) - (A \cap B)$

b) $A \cap B \cap C^C$

c) $\mathcal{P}(A \cup B \cup C)$

✍**6.** Determinar los siguientes conjuntos por extensión:

a) $\{x \in \mathbb{Z}/x = 3(-1)^k, k \in \mathbb{Z}\}$

b) $\{x \in \mathbb{Z}^-/x = 5k+1, k \in \mathbb{Z}\}$

c) $\{x \in \mathbb{N}/-2 < 4x+7 < 24\}$

d) $\{\frac{2x-1}{x} \in \mathbb{Q}/x \in \mathbb{Z} \wedge 10 < x < 28\}$

e) $\{2x \in \mathbb{Z} / x \in \mathbb{N} \wedge x \text{ es divisible por } 3\}$

✍**7.** Sean A, B y C conjuntos arbitrarios. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas? Justifique su respuesta.

a) Si $A \in B$ y $B \subset C$ entonces $A \in C$.

b) Si $A \in B$ y $B \subset C$ entonces $A \subset C$.

c) Si $A \cap B \subset C \cap B$ entonces $A \subset C$.

d) Si $A - B \subset C - B$ entonces $A \subset C$.

e) Si $A \subset B$ y $B \in C$ entonces $A \subset C$.

f) Si $A \cup C = B \cup C$ entonces $A = B$.

✍**8.** Sean $H = \{a, b, c, d, e, \{a, b, c\}, \{a, b\}, \{b\}, \{c, d\}, \emptyset\}$ y $J = \{b, d, \{a, b\}, \{b\}, \emptyset\}$. Determine los siguientes conjuntos:

a) $H - (J \cap H)$

b) $(H \cup J) - \{\{a, b\}, c, d\}$

c) $J \cap (H - \{a, b, c\})$

d) $H - (J - H)$

✍**9.** Pruebe que la igualdad $(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$, no es siempre válida.

✍**10.** Use la ley distributiva para demostrar:

$$(A \cup B) \cap (C \cup D) = (A \cap C) \cup (A \cap D) \cup (B \cap C) \cup (B \cap D)$$

✍**11.** Se sabe que $A \subset B$ y $B \cap C = \emptyset$. Simplificar:
$T = (C - A) \cup [(A - B) \cup C^C] \cup \{[(A \cap D)^C - B] \cap C\}$

✍**12.** Si $A^C \cap B^C \cap C^C \subset D$, reduzca $\{[A \cap D^C \cap (A \cup B)] \cup [(B - D) \cap (A \cup B)] \cup [(C \cap D^C) \cap (A \cup B)]\}^C$

✍**13.** Simplificar:

$$(A^C \cap B^C \cap C) \cup (B^C \cap C) \cup (B^C \cap A^C \cap C) \cup [(A^C \cup C^C \cup B^C) \cap (B^C \cup C^C)]^C$$

✍**14.** Si A y B son subconjuntos de U, pruebe que: si $A \subset U - B$ entonces $A \cap B = \emptyset$.

✍**15.** Sean A, B y C subconjuntos de U. Pruebe que

a) $U - (A \cup B \cup C) = (U - A) \cap (U - B) \cap (U - C)$

b) $U - (A \cap B \cap C) = (U - A) \cup (U - B) \cup (U - C)$

✍**16.** Para todos los conjuntos A, B y C, pruebe las siguientes afirmaciones:

a) Si $C \subset A$ entonces $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$.

b) Si $A^C \subset B^C$ entonces $B \subset A$.

c) $(A - B) - C = (A - C) - (B - C)$

✍**17.** Con la ayuda de diagrama de Veen Euler investigue la validez de cada inferencia siguiente:

a) Si A, B y C son subconjuntos de U tal que $A \cap B \subset C^C$ y $A \cup C \subset B$, entonces $A \cap C = \emptyset$.

b) Si A, B y C son subconjuntos de U tal que $A \subset (B \cup C)^C$ y $B \subset (A \cup C)^C$, entonces $B = \emptyset$.

✍**18.** Sean $A \subset U$ y $B \subset U$. Pruebe:

a) $A \subset B \Longleftrightarrow A \cap B^C = \emptyset$

b) $A = B \Longleftrightarrow A \triangle B = \emptyset$

c) $A \cup B = \emptyset \Longrightarrow A = \emptyset \wedge B = \emptyset$

✍**19.** Sea $\mathbb{Z}_{>1}$ el conjunto de los números enteros mayores que 1. Para cada $n \geq 2$, defina

$$X_n = \{nk/k \geq 2, k \in \mathbb{Z}_{>1}\}$$

Determine $\mathbb{Z} - \bigcup\limits_{n=2}^{\infty} X_n$.

✍**20.** Dé un contraejemplo o demuestre las siguientes afirmaciones:

a) Si A, B y C son conjuntos que satisfacen $A \triangle C = B \triangle C$ entonces $A = B$.

b) Si $A \triangle B = \emptyset$ entonces $A = B$.

c) Si $A \subset B$ entonces $A \triangle C \subset B \triangle C$.

✍**21.** Sea $U = \mathbb{R}$ y sean $A = \{x \in \mathbb{R}/ -3 \leq x \leq 1\}$, $B = \{x \in \mathbb{R}/ -1 < x \leq 3\}$ y $C = \{x \in \mathbb{R}/4 < x \leq 8\}$. Determine cada uno de los siguientes enunciados:

a) $A \cup B \cup C$

b) $A \cap B \cap C$

c) $A^C \cap (B \cup C)$

d) $(A \cup B) \cap C^C$

e) $[(A \cap B) \cup C] - A$

✍**22.** Sea $X_n = \left\{x \in \mathbb{R}/ -\dfrac{1}{2n} \leq x \leq \dfrac{1}{2n}\right\} = \left[-\dfrac{1}{2n}, \dfrac{1}{2n}\right]$, para cada entero n. Determine:

a) $\bigcup\limits_{n=1}^{3} X_n$

b) $\bigcap\limits_{n=1}^{3} X_n$

c) $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$

d) $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$

e) $\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n\right)^C$

✍**23.** Si $n(A \cup B) = 11$, $n(A \cap B) = 2$ y $3n(A) - 4n(B) = 4$, hallar $n(A) - n(B)$.

✍**24.** Sean $n[\mathcal{P}(A)] = 64$, $n[\mathcal{P}(B)] = 32$ y $n(A \cap B) = 3$. Calcular $n[\mathcal{P}(A \cup B)]$.

✍**25.** Considere los conjuntos $A = \{x, y, z, w\}$ y $B = \{t, y, z, s\}$. Determine:

a) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$

b) $\mathcal{P}(A - B) \cup \mathcal{P}(A \cap B)$

c) $\mathcal{P}(A \triangle B) \cap \mathcal{P}(A)$

✍**26.** Sean A, B y C tres conjuntos contenidos en un universo finito de 60 elementos, además, se tiene: $n(B \triangle C) = 40$, $n(A \cap (B^C \cap C^C)) = 10$, $n(A \cap B \cap C) = 5$ y $B \cap C \cap A^C = \emptyset$. Calcular $n(A^C \cap B^C \cap C^C)$.

✍**27.** Los cardinales de los conjuntos A, B y C son números enteros consecutivos; además, $n[P(A)] + n[P(B)] + n[P(C)] = 448$. Entonces determine el valor de

$$E = n(A) + n(B) + n(C)$$

✍**28.** Sean A, B y C contenidos en un conjunto universal U. Si $n(U) = 18$, además, A, B y C son tres conjuntos cuyos números cardinales están en progresión aritmética, calcule la suma del máximo y mínimo valor de $n[[\mathcal{P}(A \cap B) \cup C]^C]$, considere

$$n[\mathcal{P}(A)] + n[\mathcal{P}(B)] + n[\mathcal{P}(C)] = 336$$

✍**29.** En una encuesta realizada en centro de Idiomas (de UNAP), se obtuvieron los siguientes resultados: el número de personas que estudian inglés es 60, alemán 48 y francés 28. El número de personas que estudian sólo francés es 1/3 de los que estudian sólo ingles y 1/2 de los estudian sólo alemán. El número de personas que estudian los tres idiomas es 1/2 de los que sólo estudian inglés y francés. El número de personas que sólo estudian alemán y francés es 1/3 de los que sólo estudian inglés y alemán.

a) ¿Cuántas personas estudian un sólo idioma?

b) ¿Cuántas personas estudian por lo menos un idioma?

c) ¿Cuántas personas estudian sólo dos idiomas?

d) ¿Cuántas personas estudian por menos dos idiomas?

✍**30.** En una comunidad, las personas conforman tres asociaciones San Pedro, Copacabana y Señor de Huanca, que fueron registrados de la siguiente manera 50 personas conforman San Pedro, 80 en Copabana y 120 en Señor de Huanca. El número personas que son socios de las tres asociaciones son 5, San Pedro y Señor de Huanca 20, San Pedro y Copabana 8, y Señor de Huanca y Copabana son 15.

a) ¿Cuántas personas hay en total en tal comunidad?

b) ¿Cuántas personas son socios de por lo menos dos asociaciones?

c) ¿Cuántas personas son socios de dos asociaciones?

d) ¿Cuántas personas son socios de una asociación?

✍**31.** En la ciudad de Puno, se realizó una encuesta a 3800 personas sobre los periódicos que costumbran leer y el resultado fue:

a) 1300 leen “Los andes”

b) 1100 leen “El correo”

c) 1600 leen “La frontera”

d) 500 leen “La frontera” y “Los andes”

e) 300 leen “El correo” y “Los andes”

f) 400 leen “La frontera” y “El correo”

g) 100 leen “La frontera”, “El correo” y “Los andes”

1) ¿Cuántas personas leen apenas “El correo”?
2) ¿Cuántas personas leen apenas “Los andes”?
3) ¿Cuántas personas leen apenas “Los andes” y “La frontera”?
4) ¿Cuántas personas no leen ningún de los tres periódicos?
5) ¿Cuántas personas leen apenas uno de los tres periódicos?
6) ¿Cuántas personas leen más de uno de los tres periódicos?

✍**32.** Pruebe que

$$\{x : x \in X \wedge x \notin x\} \in \mathcal{P}(X) - X$$

3

Números reales

El propósito del capítulo es exponer los axiomas de números reales, potenciación, axiomas de orden, radicales, operaciones con expresiones algebraicas y la determinación de simétria de ecuaciones. Para profundizar este capítulo, puede consultar en [4, 5, 20, 21, 26].

3.1. Sistema de números reales

El sistema de números reales, es un conjunto $\mathbb{R}$, con dos operaciones adición y multiplicación, que satisface los siguientes axiomas:

Axiomas de números reales:

AX1). $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x + y \in \mathbb{R}$ (clausura)

AX2). $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x + y = y + x$ (conmutativa)

AX3). $\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ (x + y) + z = x + (y + z)$ (asociativa)

AX4). $\exists! 0 \in \mathbb{R}$, tal que $x + 0 = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ (existencia y unicidad de 0)

AX5). $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists! -x \in \mathbb{R}$ tal que $x + (-x) = 0$ (existencia y unicidad de $-x$)

AX6). $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x \cdot y \in \mathbb{R}$ (clausura)

AX7). $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x \cdot y = y \cdot x$ (conmutativa)

AX8). $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ (asociativa)

AX9). $\exists! 1 \in \mathbb{R}$ tal que $1 \cdot x = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ (existencia y unicidad de 1)

AX10). $\forall x \in \mathbb{R} - \{0\},\ \exists! x^{-1} \in \mathbb{R}$ tal que $x \cdot x^{-1} = 1$ (existencia y unicidad del inversa x^{-1})

AX11). $\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ (distributiva)

Axioma de igualdad:

I1). $x = x$, para todo $x \in \mathbb{R}$(reflexiva)

I2). $x = y \Longrightarrow y = x$(simétrica)

I3). $x = y \wedge y = z \Longrightarrow x = z$(transitiva)

Definición 3.1.1

La resta, está definido por

$$\boxed{x - y := x + (-y),} \tag{3.1}$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

Definición 3.1.2

La división, está definida por

$$\boxed{\frac{x}{y} := x \cdot y^{-1},} \tag{3.2}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ y $y \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Teorema 3.1.1: Propiedades:

P1). $-0 = 0$

P2). $0 \cdot x = 0$

P3). $-x = (-1) \cdot x$, $\forall x \in \mathbb{R}$

P4). $x(-y) = -(xy) = (-x)y$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$

P5). $-(-x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$

P6). $(-x)(-y) = xy$

P7). $1^{-1} = 1$

P8). $x \neq 0 \Longrightarrow x^{-1} \neq 0$

P9). $x \neq 0 \Longrightarrow (x^{-1})^{-1} = x$

Demostración.

P1).

$$\begin{aligned} -0 &= 0 + (-0) && \textit{por AX4)} \\ &= 0 && \textit{por AX5)} \end{aligned}$$

P2).

$$\begin{aligned} 0x &= 0x + 0 && \textit{por AX4)}\\ &= 0x + [(0x + (-0x)] && \textit{por AX5)}\\ &= (0x + 0x) + (-0x) && \textit{por AX3)}\\ &= (0 + 0)x + (-0x) && \textit{por AX11)}\\ &= 0x + (-0x) && \\ &= 0 && \textit{por AX5)} \end{aligned}$$

P3).

$$\begin{aligned} (-1)x &= (-1)x + 0 && por\, AX4)\\ &= (-1)x + [x + (-x)] && por\, AX5)\\ &= [(-1) + 1]x + (-x) && por\, AX8)\ y\ AX11)\\ &= 0x + (-x) && por\, AX5)\\ &= 0 + (-x) && por\, P2)\\ &= -x && por\, AX4) \end{aligned}$$

P4).

$$\begin{aligned} x(-y) &= x(-y) + 0 && por\, AX4)\\ &= x(-y) + [(xy) + (-(xy))] && por\, AX5)\\ &= [x(-y) + xy] + (-(xy)) && por\, AX3)\\ &= x[(-y) + y] + (-(xy)) && por\, AX11)\\ &= x0 + (-(xy)) && por\, AX5)\\ &= 0 + (-(xy)) && por\, P2)\\ &= -(xy) && por\, AX4) \end{aligned}$$

De forma similar, se obtiene $(-x)y = -(xy)$.

P5).

$$\begin{aligned} x &= x + 0 && por\, AX4)\\ &= x + \{(-x) + [-(-x)]\} && por\, AX5)\\ &= [x + (-x)] + [-(-x)] && por\, AX8)\\ &= 0 + [-(-x)] && por\, AX5)\\ &= -(-x) && por\, AX4) \end{aligned}$$

P6).

$$\begin{aligned} (-x)(-y) &= -[(-x)y] && por\, P4)\\ &= -[-(xy)] && por\, P4)\\ &= xy && por\, P5) \end{aligned}$$

P7).

$$\begin{aligned} 1^{-1} &= 1 \cdot 1^{-1} && \text{por } AX9) \\ &= 1 && \text{por } AX10) \end{aligned}$$

P8). *Tenemos*

$$H : x \neq 0 \qquad\qquad C : x^{-1} \neq 0$$

Supongamos que $\sim C$: $x^{-1} = 0$. *Como* $x \neq 0$, *entonces existe* x^{-1} *tal que* $xx^{-1} = 1$; *multiplicando ambos por* x^{-1}, *a la suposición* $\sim C$ *obteniéndose* $xx^{-1} = 0$. *De esto,* $1 = 0$, *es una contradicción. De ahí,* $\sim C$, *es falsa y consecuentemente* C, *es verdadero.*

P9). *Aplicando P8), para* $x \neq 0$ *se tiene* $x^{-1} \neq 0$. *De donde, existe* $(x^{-1})^{-1}$ *tal que* $(x^{-1})(x^{-1})^{-1} = 1$, *desde luego,*

$$\begin{aligned} (x^{-1})^{-1} &= 1 \cdot (x^{-1})^{-1} && \text{por } AX9) \\ &= (xx^{-1})(x^{-1})^{-1} && \text{por } AX10) \\ &= x[x^{-1}(x^{-1})^{-1}] && \text{por } AX8) \\ &= x1 && \text{por } AX10) \\ &= x && \text{por } AX9) \end{aligned}$$

Teorema 3.1.2

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x \cdot y = 0 \iff x = 0 \vee y = 0 \tag{3.3}$$

Demostración. *Queda como ejercicio para el lector.*

Teorema 3.1.3

PP1) $x + c = y + c \implies x = y$

PP2) $xc = yc \wedge c \neq 0 \implies x = y$

PP3) $xy \neq 0 \implies (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1} = x^{-1}y^{-1}$

PP4) $\dfrac{x}{y} + \dfrac{z}{w} = \dfrac{xw + zy}{yw}$, $y \neq 0$ y $w \neq 0$

PP5) $\forall x \neq 0$, $(-x)^{-1} = -x^{-1}$

Demostración.

PP1)

$$\begin{aligned} x + c = y + c &\implies (x + c) + (-c) = (y + c) + (-c) && \\ &\implies x + (c + (-c)) = y + (c + (-c)) && \text{por } AX3) \\ &\implies x + 0 = y + 0 && \text{por } AX5) \\ &\implies x = y && \text{por } AX4) \end{aligned}$$

PP2)

$$\begin{aligned} xc = yc &\Longrightarrow (xc)c^{-1} = (yc)c^{-1} \\ &\Longrightarrow x(cc^{-1}) = y(cc^{-1}) && \textit{por } AX8) \\ &\Longrightarrow x1 = y1 && \textit{por } AX10) \\ &\Longrightarrow x = y \end{aligned}$$

PP3) *Como $xy \neq 0$, entonces*

$$\begin{aligned} (xy)^{-1} &= 1(xy)^{-1} && \textit{Por } AX9) \\ &= (xy)^{-1}(1) && \textit{Por } AX7) \\ &= (xy)^{-1}[(xx^{-1})(yy^{-1})] && \textit{Por } AX10) \\ &= (xy)^{-1}[(xy)(x^{-1}y^{-1})] && \textit{Por } AX8) \textit{ y } AX7) \\ &= [(xy)^{-1}(xy)](y^{-1}x^{-1}) && \textit{Por } AX8) \\ &= 1(y^{-1}x^{-1}) && \textit{Por } AX10) \\ &= y^{-1}x^{-1} && \textit{Por } AX9) \end{aligned}$$

PP4)

$$\begin{aligned} \frac{x}{y} + \frac{z}{w} &= xy^{-1} + zw^{-1} && \textit{Por definición de división} \\ &= (xy^{-1} + zw^{-1})[(yw)(yw)^{-1}] && \textit{Usando } (yw)(yw)^{-1} = 1 \\ &= [(xy^{-1} + zw^{-1})(yw)](yw)^{-1} && \textit{por } AX8) \\ &= [(xy^{-1})(yw) + (zw^{-1})(yw)](yw)^{-1} && \textit{por } AX11) \\ &= (xw + zy)(yw)^{-1} && \textit{por } AX8) \textit{ y } AX10) \\ &= \frac{xw + zy}{yw} && \textit{por definición de división} \end{aligned}$$

PP5)

$$\begin{aligned} -x^{-1} &= -x^{-1} \cdot 1 \\ &= (-x^{-1})[(-x)(-x)^{-1}] && \textit{por } AX10) \\ &= [(-x^{-1})(-x)](-x)^{-1} && \textit{por } AX8) \\ &= (x^{-1}x)(-x)^{-1} && \textit{por el Teorema 3.1.1 P6)} \\ &= 1(-x)^{-1} && AX10) \\ &= (-x)^{-1} && AX9) \end{aligned}$$

Ejemplo 3.1.1

Demostrar:

$$\frac{x}{y}\cdot\frac{z}{w}=\frac{xz}{yw},\ yw\neq 0; \tag{3.4}$$

$$\frac{\frac{x}{y}}{\frac{z}{w}}=\frac{xw}{yz},\ yzw\neq 0. \tag{3.5}$$

Solución.

$$\begin{aligned}
\frac{x}{y}\cdot\frac{z}{w} &= (xy^{-1})(zw^{-1}) && \text{por definición de división}\\
&= (xz)(y^{-1}w^{-1}) && \text{Usando AX7) y AX8)}\\
&= (xz)(yw)^{-1} && \text{por el Teorema 3.1.3, } PP3)\\
&= \frac{xz}{yw} && \text{por definición de división}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{x}{y}}{\frac{z}{w}} &= \left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{z}{w}\right)^{-1} && \text{por definición de división}\\
&= (xy^{-1})(zw^{-1})^{-1} && \text{por definición de división}\\
&= (xy^{-1})[z^{-1}(w^{-1})^{-1}] && \text{por el Teorema 3.1.3, } PP3)\\
&= (xy^{-1})(z^{-1}w) && \text{por el Teorema 3.1.2, } PP5)\\
&= (xw)(yz)^{-1} && AX8) \text{ y Teorema 3.1.3, } PP3)\\
&= \frac{xw}{yz} && \text{Por definición de división}
\end{aligned}$$

3.2. Potencia

Definición 3.2.1

Sean $x\in\mathbb{R}$ y $n\in\mathbb{Z}^+$. Se define:

$$\boxed{x^n := \underbrace{x\cdot x\cdot x\cdot\ldots x}_{n\text{ factores}}} \tag{3.6}$$

Ejemplo 3.2.1

Calcular:

a) $(-2)^7$

b) $(-7)^4$

c) 3^5

Solución.

$$(-2)^7 = (-2)(-2)(-2)(-2)(-2)(-2)(-2) = -128 \tag{3.7}$$
$$(-7)^4 = (-7)(-7)(-7)(-7) = 2401 \tag{3.8}$$
$$3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243 \tag{3.9}$$

Definición 3.2.2

Para todo $x \neq 0$, $n \in \mathbb{Z}^+$ *se definen:*

$$x^0 := 1, \tag{3.10}$$
$$x^{-n} := \frac{1}{x^n} \tag{3.11}$$

Ejemplo 3.2.2

Calcular π^0, 3^0 *y* 6^{-4}.

Solución.

$$\begin{aligned} \pi^0 &= 1 \\ 3^0 &= 1 \\ 6^{-4} &= \frac{1}{6^4} = \frac{1}{1296} \end{aligned}$$

Teorema 3.2.1

Las siguientes propiedades son verdaderas: para todo $m, n \in \mathbb{Z}^+$,

PO1) $x^m x^n = x^{m+n}$

PO2) $(xy)^n = x^n y^n$

PO3) $(x^m)^n = x^{mn}$

PO4) $\dfrac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$

PO5) $\left(\dfrac{x}{y}\right)^n = \dfrac{x^n}{y^n}$

Solución.

PO1)

$$\begin{aligned} x^m x^n &= (\underbrace{xxx\ldots xxx}_{m \text{ factores}})(\underbrace{xxx\ldots xxx}_{n \text{ factores}}) \\ &= (\underbrace{xxx\ldots xxx}_{m+n \text{ factores}}) \\ &= x^{m+n} \end{aligned}$$

PO2)

$$\begin{aligned}(xy)^n &= \underbrace{(xy)(xy)(xy)\dots(xy)}_{n \text{ factores}}\\ &= (\underbrace{xxx\dots xxx}_{n \text{ factores}})(\underbrace{yyy\dots yyy}_{n \text{ factores}})\\ &= x^n y^n\end{aligned}$$

PO3)

$$\begin{aligned}(x^m)^n &= (\underbrace{x^m x^m x^m \dots x^m}_{n \text{ factores}})\\ &= \underbrace{\underbrace{xxx\dots xxx}_{m \text{ factores}}\underbrace{xxx\dots xxx}_{m \text{ factores}}\underbrace{xxx\dots xxx}_{m \text{ factores}}\dots\underbrace{xxx\dots xxx}_{m \text{ factores}}}_{n \text{ factores}}\\ &= (\underbrace{xxx\dots xxx}_{mn \text{ factores}})\\ &= x^{mn}\end{aligned}$$

PO4) *Como* $x^0 = 1$, *entonces*

$$x^n x^{-n} = x^{n+(-n)} = x^0 = 1$$

De esto, $(x^n)^{-1} = x^{-n}$. *Aplicando aquello tenemos:*

$$\begin{aligned}\frac{x^m}{x^n} &= x^m (x^n)^{-1}\\ &= x^m x^{-n}\\ &= x^{m+(-n)}\\ &= x^{m-n}\end{aligned}$$

PO5)

$$\begin{aligned}\left(\frac{x}{y}\right)^n &= \underbrace{\left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{x}{y}\right)\dots\left(\frac{x}{y}\right)}_{n \text{ factores}}\\ &= \underbrace{\left(xy^{-1}\right)\left(xy^{-1}\right)\left(xy^{-1}\right)\dots\left(xy^{-1}\right)}_{n \text{ factores}}\\ &= (\underbrace{xxx\dots xxx}_{n \text{ factores}})(\underbrace{y^{-1}y^{-1}y^{-1}\dots y^{-1}}_{n \text{ factores}})\\ &= x^n (y^{-1})^n\\ &= x^n y^{-n}\\ &= x^n \frac{1}{y^n}\\ &= \frac{x^n}{y^n}\end{aligned}$$

Teorema 3.2.2

Para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, se tiene:

PO6) $\left(\dfrac{x}{y}\right)^{-n} = \left(\dfrac{y}{x}\right)^{n}$

PO7) $\dfrac{x^{-n}}{y^{-m}} = \dfrac{y^m}{x^n}$

Demostración.

PO6)

$$\begin{aligned}
\left(\frac{x}{y}\right)^{-n} &= \frac{1}{\left(\dfrac{x}{y}\right)^{n}} && \text{por definición 3.11}\\
&= \frac{1}{\dfrac{x^n}{y^n}} && \text{por OP5)}\\
&= \frac{y^n}{x^n} && \text{por existencia del inverso}\\
&= \left(\frac{y}{x}\right)^{n} && \text{por OP5)}
\end{aligned}$$

PO7)

$$\begin{aligned}
\frac{x^{-n}}{y^{-m}} &= \frac{\dfrac{1}{x^n}}{\dfrac{1}{y^m}} && \text{por definición 3.11}\\
&= \left(\frac{1}{x^n}\right)\left(\frac{1}{y^m}\right)^{-1} && \text{por definición de división}\\
&= \left(\frac{1}{x^n}\right)\left(\frac{y^m}{1}\right)^{1} && \text{por PO7)}\\
&= \frac{y^m}{x^n}
\end{aligned}$$

Ejemplo 3.2.3

Simplificar $H = \dfrac{(12)^2(27)^3(125)}{(144)(81)(25)}$.

Solución.

Como $12 = 3 \cdot 2^2$, $27 = 3^3$, $125 = 5^3$, $144 = 3^2 \cdot 2^4$ *entonces*

$$\begin{aligned}
H &= \frac{(12)^2(27)^3(125)}{(144)(81)(25)} \\
&= \frac{(3 \cdot 2^2)^2(3^3)^3(5^3)}{3^2 \cdot 2^4 \cdot 3^4 \cdot 5^2} \\
&= \frac{3^2 \cdot 2^4 \cdot 3^9 \cdot 5^3}{3^6 \cdot 2^4 \cdot 5^2} \\
&= \frac{3^{11} \cdot 2^4 \cdot 5^3}{3^6 \cdot 2^4 \cdot 5^2} \\
&= 3^5 \cdot 5 \\
&= 1215
\end{aligned}$$

Ejemplo 3.2.4

Simplificar cada expresión

1. $\dfrac{x^{-3} \cdot x^7 \cdot x^{-5} \cdot x^{-2}}{x^2 \cdot x^{-10} \cdot x^4}$
2. $\left(\dfrac{x}{2}\right)^{-1} \cdot \left(\dfrac{3x^2}{4}\right)^3 \cdot \left(\dfrac{3x^{-3}}{2}\right)^{-5}$

Solución.

1.

$$\begin{aligned}
\frac{x^{-3} \cdot x^7 \cdot x^{-5} \cdot x^{-2}}{x^2 \cdot x^{-10} \cdot x^4} &= \frac{x^{-3+7-5-2}}{x^{2-10+4}} \\
&= \frac{x^{-3}}{x^{-4}} \\
&= x^{4-3} \\
&= x
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{x}{2}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{3x^2}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{3x^{-3}}{2}\right)^{-5} &= \left(\frac{2}{x}\right)^1 \cdot \left(\frac{3x^2}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3x^{-3}}\right)^5 \\
&= \left(\frac{2}{x}\right)^1 \cdot \left(\frac{3^3x^6}{4^3}\right) \cdot \left(\frac{2^5}{3^5x^{-15}}\right) \\
&= \frac{(2)(3^3x^6)(2^5)}{(x)(2^6)(3^5x^{-15})} \\
&= \frac{2^6 \cdot 3^3 \cdot x^6}{2^6 \cdot 3^5 \cdot x^{-14}} \\
&= \frac{2^{6-6} \cdot x^{6+14}}{3^{5-3}} \\
&= \frac{x^{20}}{9}
\end{aligned}$$

3.3. Ordenamiento de números reales

Axiomas de orden:

En el conjunto de los números reales existe un subconjunto $\mathbb{R}^+$, de números reales positivos tal que:

AXR1) Si $x \in \mathbb{R}$, exactamente una de las tres afirmaciones ocurre: $x \in \mathbb{R}^+$; $x = 0$; $-x \in \mathbb{R}^+$.

AXR2) Si $x, y \in \mathbb{R}^+$, entonces $x + y \in \mathbb{R}^+$;

AXR3) Si $x, y \in \mathbb{R}^+$, entonces $xy \in \mathbb{R}^+$.

El conjunto de números reales negativos es denotado por $\mathbb{R}^-$.

Definición 3.3.1

El número real x, es negativo si y sólo si, $-x$ es positivo. Es decir,

$$x \in \mathbb{R}^- \iff -x \in \mathbb{R}^+ \tag{3.12}$$

Definición 3.3.2

Sean x y y números reales.

$$x < y \iff y - x > 0 \iff \exists w \in \mathbb{R}^+ : w = y - x \tag{3.13}$$
$$y > x \iff x < y \tag{3.14}$$

Teorema 3.3.1: Tricotomía

Para cualesquiera x y y números reales, exactamente una afirmación siguiente ocurre: $x<y$, $x=y$, $y<x$.

Demostración. *Queda como ejercicio para el lector.*

Teorema 3.3.2: Transitividad de la ordenación

Si $x < y$ y $y < z$ entonces $x < z$.

Demostración.

Aplicando el Axioma de orden AXR2),

$$\begin{aligned} x < y \wedge y < z &\Longrightarrow (\exists w_1 \in \mathbb{R}^+ : w_1 = y - x) \wedge (\exists w_2 \in \mathbb{R}^+ : w_2 = z - y) \\ &\Longrightarrow \exists w_1 + w_2 \in \mathbb{R}^+ : w_1 + w_2 = (y - x) + (z - y) = z - x \\ &\Longrightarrow x < z \end{aligned}$$

Teorema 3.3.3: Monotonia de la adicción

Si $x < y$ entonces $x + z < y + z$

Demostración.

$$\begin{aligned} x < y &\iff \exists w \in \mathbb{R}^+ : w = y - x \\ &\iff \exists w \in \mathbb{R}^+ : w = (y+z) - (x+z) \\ &\iff x + z < y + z \end{aligned}$$

Teorema 3.3.4: Monotonia de la multiplicación

Si $x < y$ y $z \in \mathbb{R}^+$ entonces $xz < yz$

Demostración.

$$\begin{aligned} x < y, z \in \mathbb{R}^+ &\implies \exists w \in \mathbb{R}^+ : w = y - x, z \in \mathbb{R}^+ \\ &\implies wz = yz - xz \in \mathbb{R}^+ && \textit{por AXR3)} \\ &\implies xz < yz && \textit{por definición} \end{aligned}$$

Definición 3.3.3

Sean x y y números reales.

$$x \leq y \iff x < y \vee x = y \tag{3.15}$$

Teorema 3.3.5: Propiedades:

PO1). $x \leq y \implies x + z \leq y + z$

PO2). $0 \leq x \wedge 0 \leq y \implies 0 \leq xy$

PO3). $x < y \wedge y \leq z \implies x < z$

PO4). $x \leq y \wedge y < z \implies x < z$

PO5). $x \leq y \wedge z \in \mathbb{R}^+ \implies xz \leq yz$

Demostración. *Queda como ejercicio para el lector.*

Aplicando el teorema 3.3.5 PO2), se obtiene

$$\boxed{x^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}.} \tag{3.16}$$

Ejemplo 3.3.1

Sean x, y, z y w reales positivos tales que $\frac{x}{y} < \frac{z}{w}$. Demuestre que $\frac{x}{y} < \frac{x+z}{y+w} < \frac{z}{w}$.

Solución.

Como $x, y, z, w > 0$, entonces:

$$\begin{aligned} \frac{x}{y} < \frac{z}{w} &\iff xw < yz \\ &\iff yz - xw > 0 \end{aligned}$$

Siendo $y + w > 0$ *e* $y > 0$ *tenemos*

$$\begin{aligned}
yz - xw > 0 &\Longrightarrow \frac{yz - xw}{(y+w)y} > 0 \\
&\Longrightarrow \frac{yz + yx - xw - yx}{(y+w)y} > 0 \\
&\Longrightarrow \frac{y(z+x) - x(y+w)}{(y+w)y} > 0 \\
&\Longrightarrow \frac{\cancelto{1}{y}\,(x+z)}{\cancelto{1}{y}\,(y+w)} - \frac{x\,\cancelto{1}{(y+w)}}{\cancelto{1}{(y+w)}\,y} > 0 \\
&\Longrightarrow \frac{x+z}{y+w} > \frac{x}{y}
\end{aligned}$$

Se sabe que $y + w > 0$ *e* $w > 0$, *luego*

$$\begin{aligned}
yz - xw > 0 &\Longrightarrow \frac{yz - xw}{w(y+w)} > 0 \\
&\Longrightarrow \frac{yz + wz - wz - xw}{w(y+w)} > 0 \\
&\Longrightarrow \frac{z(y+w) - w(z+x)}{w(y+w)} > 0 \\
&\Longrightarrow \frac{z\,\cancelto{1}{(y+w)}}{w\,\cancelto{1}{(y+w)}} - \frac{\cancelto{1}{w}(z+x)}{\cancelto{1}{w}(y+w)} > 0 \\
&\Longrightarrow \frac{z}{w} > \frac{x+z}{y+w}
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\frac{x}{y} < \frac{x+z}{y+w} < \frac{z}{w}.$$

3.4. Radicales

Definición 3.4.1

La raíz n-ésima principal de x, *es definida por:*

$$n \text{ impar}: \sqrt[n]{x} = y \Longleftrightarrow y^n = x \tag{3.17}$$

$$n \text{ par}: \sqrt[n]{x} = y \Longleftrightarrow y^n = x \wedge y \geq 0 \tag{3.18}$$

Ejemplo 3.4.1

Calcular:

$$\sqrt[4]{256}, \sqrt[3]{-343}, \sqrt[5]{371293}$$

Solución.

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{256} &= 4, \text{ porque } 4^4 = 256 \text{ y } 4 \geq 0\\ \sqrt[3]{-343} &= -7, \text{ porque } (-7)^3 = -343\\ \sqrt[5]{371293} &= 13, \text{ porque } 13^5 = 371293\end{aligned}$$

Teorema 3.4.1

Sea $n \in \mathbb{Z}^+$. Entonces

R1) $\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\sqrt[n]{y}$

R2) $\sqrt[n]{\dfrac{x}{y}} = \dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$

R3) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[mn]{x}$

R3) $\sqrt[n]{x^n} = \begin{cases} x & \text{si } n \text{ es impar,}\\ |x| & \text{si } n \text{ es par.}\end{cases}$

Demostración. *Queda como ejercicio.*

Definición 3.4.2

Para todo $m/n \in \mathbb{Q}$ con $n > 0$, se define:

$$\boxed{x^{m/n} = (\sqrt[n]{x})^m} \tag{3.19}$$

o equivalentemente,

$$\boxed{x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m}} \tag{3.20}$$

Para el caso n par se requiere $x \geq 0$.

Ejemplo 3.4.2

Reducir:

$$\sqrt{20} + \sqrt{405} + \sqrt{80} - \sqrt{980} \tag{3.21}$$

Solución. *Como $20 = 2^2 \cdot 5$, $405 = 3^4 \cdot 5$, $80 = 2^4 \cdot 5$ y $980 = 2^2 \cdot 7^2 \cdot 5$, entonces*

$$\begin{aligned}\sqrt{20} + \sqrt{405} + \sqrt{80} - \sqrt{980} &= \sqrt{2^2 \cdot 5} + \sqrt{3^4 \cdot 5} + \sqrt{2^4 \cdot 5} - \sqrt{2^2 \cdot 7^2 \cdot 5}\\ &= \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{5} + \sqrt{3^4} \cdot \sqrt{5} + \sqrt{2^4} \cdot \sqrt{5} - \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{7^2} \cdot \sqrt{5}\\ &= 2\sqrt{5} + 9\sqrt{5} + 4\sqrt{5} - 14\sqrt{5}\\ &= 15\sqrt{5} - 14\sqrt{5}\\ &= \sqrt{5}\end{aligned}$$

Ejemplo 3.4.3

Simplificar:

$$\sqrt[5]{x^{26}\sqrt[3]{x^{11}\sqrt[3]{x^3}}} \tag{3.22}$$

Solución. *Aplicando el Teorema 3.4.1, tenemos*

$$\begin{aligned}
\sqrt[5]{x^{26}\sqrt[3]{x^{11}\sqrt[3]{x^3}}} &= \sqrt[5]{x^{26}\sqrt[3]{x^{11}x}}\\
&= \sqrt[5]{x^{26}\sqrt[3]{x^{12}}}\\
&= \sqrt[5]{x^{26}\sqrt[3]{(x^4)^3}}\\
&= \sqrt[5]{x^{26}x^4}\\
&= \sqrt[5]{x^{30}}\\
&= \sqrt[5]{(x^6)^5}\\
&= x^6
\end{aligned}$$

Ejemplo 3.4.4

Racionalizar el denominador:

$$\frac{1}{2-\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6}} \tag{3.23}$$

Solución. *Aplicamos* $(x-y)(x+y)=x^2-y^2$ *tenemos:*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2-\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6}} &= \frac{1}{(2+\sqrt{3})-(\sqrt{2}+\sqrt{6})}\,\frac{(2+\sqrt{3})+(\sqrt{2}+\sqrt{6})}{(2+\sqrt{3})+(\sqrt{2}+\sqrt{6})}\\
&= \frac{2+\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{6}}{(2+\sqrt{3})^2-(\sqrt{2}+\sqrt{6})^2}\\
&= \frac{2+\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4+\cancel{4\sqrt{3}}+3-(2+\cancel{2\sqrt{12}}+6)}\\
&= \frac{2+\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{6}}{-1}\\
&= -2-\sqrt{3}-\sqrt{2}-\sqrt{6}
\end{aligned}$$

Ejemplo 3.4.5

Racionalizar el denominador de la expresión:

$$\frac{\sqrt[3]{3}-1}{\sqrt[3]{3}+1} \tag{3.24}$$

Solución. *Usando* $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$ *obtenemos:*

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt[3]{3}-1}{\sqrt[3]{3}+1} &= \frac{\sqrt[3]{3}-1}{\sqrt[3]{3}+1}\,\frac{(\sqrt[3]{3}^2 - \sqrt[3]{3}+1)}{(\sqrt[3]{3}^2 - \sqrt[3]{3}+1)}\\
&= \frac{\sqrt[3]{3}^3 - \sqrt[3]{3}^2 + \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{3}^2 + \sqrt[3]{3} - 1}{(\sqrt[3]{3})^3 + 1^3}\\
&= \frac{2 - 2\sqrt[3]{9} + 2\sqrt[3]{3}}{4}\\
&= \frac{1 - \sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3}}{2}
\end{aligned}$$

3.5. Expresiones algebraicas

Polinomios

Un polinomio de grado $n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ es de la forma

$$\boxed{P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,} \tag{3.25}$$

donde $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ son números reales. El número $a_n \neq 0$, es llamado coeficiente principal del polinomio.

Suma y resta de polinomios

Ejemplo 3.5.1

Hallar la suma: $(x^3 - 8x^2 + 3x + 14) + (3x^3 + 5x^2 - 6x - 1)$.
Solución. *Agrupemos los términos semejantes para poder sumar:*

$$\begin{aligned}
(x^3 - 8x^2 + 3x + 14) + (3x^3 + 5x^2 - 6x - 1) =&(x^3 + 3x^3) + (-8x^2 + 5x^2) + (3x - 6x)\\
&+ (14 - 1)\\
=&4x^3 - 3x^2 - 3x + 13
\end{aligned}$$

Ejemplo 3.5.2

Hallar la resta: $(x^3 + 5x^2 - 2x + 1) - (x^3 + 2x^2 - 2x + 1)$.
Solución. *Apliquemos la distributiva y luego grupemos los términos semejantes para determinar la resta:*

$$\begin{aligned}
(x^3 + 5x^2 - 2x + 1) - (x^3 + 2x^2 - 2x + 1) =&x^3 + 5x^2 - 2x + 1 - x^3 - 2x^2 + 2x - 1\\
=&(x^3 - x^3) + (5x^2 - 2x^2) + (-2x + 2x)\\
&+ (1 - 1)\\
=&3x^2
\end{aligned}$$

Producto de polinomios

Ejemplo 3.5.3

Encuentre el producto:

$$(2x+3)(x-5) \tag{3.26}$$

Solución.

Primera forma:

$$\begin{aligned}(2x+3)(x-5) &= 2x(x-5)+3(x-5)\\ &= 2x^2-10x+3x-15\\ &= 2x^2-7x-15\end{aligned}$$

Segunda forma:

$$\begin{array}{r} 2x+3 \quad \times \\ x-5 \\ \hline -10x-15 \\ 2x^2+3x \qquad \\ \hline 2x^2-7x-15 \end{array}$$

Ejemplo 3.5.4

Encuentre el producto:

$$(x^2+x-2)(2x^2-3x+4) \tag{3.27}$$

Solución.

Primera forma:

$$\begin{aligned}(x^2+x-2)(2x^2-3x+4) =& x^2(2x^2-3x+4)+x(2x^2-3x+4)-2(2x^2-3x+4)\\ =& 2x^4-3x^3+4x^2+2x^3-3x^2+4x-4x^2+6x-8\\ =& 2x^4+(-3x^3+2x^3)+(4x^2-3x^2-4x^2)+(4x+6x)-8\\ =& 2x^4-x^3-3x^2+10x-8\end{aligned}$$

Segunda forma:

$$\begin{array}{r} x^2+x-2 \quad \times \\ 2x^2-3x+4 \\ \hline 4x^2+4x-8 \\ -3x^3-3x^2+6x \qquad \\ 2x^4+2x^3-4x^2 \qquad\qquad \\ \hline 2x^4-x^3-3x^2+10x-8 \end{array}$$

Factorización

Ejemplo 3.5.5

Factorizar: $-8x^2 + 12x$
Solución. *El máximo factor común de* $-8x^2$ *y* $12x$ *es* $4x$, *y ésta será factorizado de siguientes manera:*

$$-8x^2 + 12x = 4x(-2x + 3)$$

Las expresiones $4x$ *y* $-2x + 3$, *son factores de* $-8x^2 + 12x$.

Ejemplo 3.5.6

Factorizar: $x^2 - x - 2$
Solución.

$$\begin{aligned} x^2 - x - 2 &= x^2 - 1 - x - 1 \\ &= (x^2 - 1) - (x + 1) \\ &= (x + 1)(x - 1) - (x + 1) \\ &= (x + 1)(x - 1 - 1) \\ &= (x + 1)(x - 2) \end{aligned}$$

Las expresiones $(x + 1)$ *y* $(x - 2)$ *son factores de* $x^2 - x - 2$.

Ejemplo 3.5.7

Factorizar: $20x^8y^6 - 12x^{16}y^4 + 2x^{12}y^8$
Solución.

$$20x^8y^6 - 12x^{16}y^4 + 2x^{12}y^8 = 2x^8y^4(10y^2 - 6x^8 + x^4y^4)$$

Ejemplo 3.5.8

Factorizar: $x^{5/4} - 4x^{1/4} - 21x^{-3/4}$
Solución. *Factorizando el término con menor exponente y la expresión cuadrática, tenemos:*

$$\begin{aligned} x^{5/4} - 4x^{1/4} - 21x^{-3/4} &= (x^2 - 4x - 21)x^{-3/4} \\ &= (x^2 + 3x - 7x - 21)x^{-3/4} \\ &= [x(x + 3) - 7(x + 3)]x^{-3/4} \\ &= (x - 7)(x + 3)x^{-3/4} \end{aligned}$$

Ejemplo 3.5.9

Factorizar: $x^2(x - 13)^{-3/4} + 3(x - 13)^{1/4} - (x - 13)^{-3/4}$
Solución.

$$\begin{aligned} x^2(x-13)^{-3/4} + 3(x-13)^{1/4} - (x-13)^{-3/4} &= [x^2 + 3(x-13) - 1](x-13)^{-3/4} \\ &= (x^2 + 3x - 40)(x-13)^{-3/4} \\ &= (x-5)(x+8)(x-13)^{-3/4} \end{aligned}$$

Multiplicación y división de expresiones racionales

Definición 3.5.1

La multiplicación de dos racionales está definida por:

$$\boxed{\frac{P(x)}{Q(x)} \times \frac{S(x)}{T(x)} := \frac{P(x)S(x)}{Q(x)T(x)}} \tag{3.28}$$

La división de dos racionales está definida por:

$$\boxed{\frac{P(x)}{Q(x)} \div \frac{S(x)}{T(x)} := \frac{P(x)}{Q(x)} \times \frac{T(x)}{S(x)}} \tag{3.29}$$

Ejemplo 3.5.10

Calcular el producto: $\dfrac{2x-3}{x-7} \times \dfrac{x+5}{x+2}$.

Solución.

$$\begin{aligned} \frac{2x-3}{x-7} \times \frac{x+5}{x+2} &= \frac{(2x-3)(x+5)}{(x-7)(x+2)} \\ &= \frac{2x(x+5) - 3(x+5)}{x(x+2) - 7(x+2)} \\ &= \frac{2x^2 + 10x - 3x - 15}{x^2 + 2x - 7x - 14} \\ &= \frac{2x^2 + 7x - 15}{x^2 - 5x - 14} \end{aligned}$$

Ejemplo 3.5.11

Calcular la división: $\dfrac{x^2-9}{x+5} \div \dfrac{x^2+11x+24}{x^2+2x-15}$.

Solución.

$$
\begin{aligned}
\frac{x^2-9}{x+5} \div \frac{x^2+11x+24}{x^2+2x-15} &= \frac{x^2-9}{x+5} \times \frac{x^2+2x-15}{x^2+11x+24} \\
&= \frac{(x^2-9)(x^2+2x-15)}{(x+5)(x^2+11x+24)} \\
&= \frac{(x-3)\cancel{(x+3)}\cancel{(x+5)}\ (x-3)}{\cancel{(x+5)}\cancel{(x+3)}\ (x+8)} \\
&= \frac{(x-3)^2}{x+8}
\end{aligned}
$$

Suma y resta de expresiones racionales

Definición 3.5.2

La suma de dos racionales está definida por:

$$\boxed{\frac{P(x)}{Q(x)} + \frac{S(x)}{Q(x)} := \frac{P(x)+S(x)}{Q(x)}} \tag{3.30}$$

La resta de dos racionales es definida por:

$$\boxed{\frac{P(x)}{Q(x)} - \frac{S(x)}{Q(x)} := \frac{P(x)-S(x)}{Q(x)}} \tag{3.31}$$

Ejemplo 3.5.12

Sumar: $\dfrac{x-1}{x+1} + \dfrac{x}{x+3}$

Solución. *En la suma los denominadores tienen diferentes factores, encontremos mínimo común denominador (MCD):*

$$MCD(x+1, x+3) = (x+1)(x+3)$$

Ahora

$$
\begin{aligned}
\frac{x-1}{x+1} + \frac{x}{x+3} &= \frac{(x-1)}{(x+1)}\frac{(x+3)}{(x+3)} + \frac{(x)}{(x+3)}\frac{(x+1)}{(x+1)} \\
&= \frac{(x-1)(x+3)+x(x+1)}{(x+1)(x+3)} \\
&= \frac{x^2+3x-3}{x^2+4x+3}
\end{aligned}
$$

Ejemplo 3.5.13

Restar: $\dfrac{5}{x^2-16} - \dfrac{3}{(x-4)^2}$

Solución. *Como* $x^2-16=(x-4)(x+4)$ *entonces*

$$MCD((x-4)(x+4),(x-4)^2)=(x-4)^2(x+4)$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\frac{5}{x^2-16}-\frac{3}{(x-4)^2} &= \frac{5}{(x^2-16)}\frac{(x-4)}{(x-4)}-\frac{3}{(x-4)^2}\frac{(x+4)}{(x+4)}\\
&= \frac{5(x-4)}{(x-4)^2(x+4)}-\frac{3(x+4)}{(x-4)^2(x+4)}\\
&= \frac{5x-20-3x-12}{(x-4)^2(x+4)}\\
&= \frac{2x-32}{(x-4)^2(x+4)}
\end{aligned}$$

Ejemplo 3.5.14

Calcular: $\dfrac{x}{x^2-x-6}-\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{2}{x-3}$

Solución. *Como* $x^2-x-6=(x-3)(x+2)$ *entonces*

$$MCD((x-3)(x+2),(x+2),(x-3))=(x-3)(x+2)$$

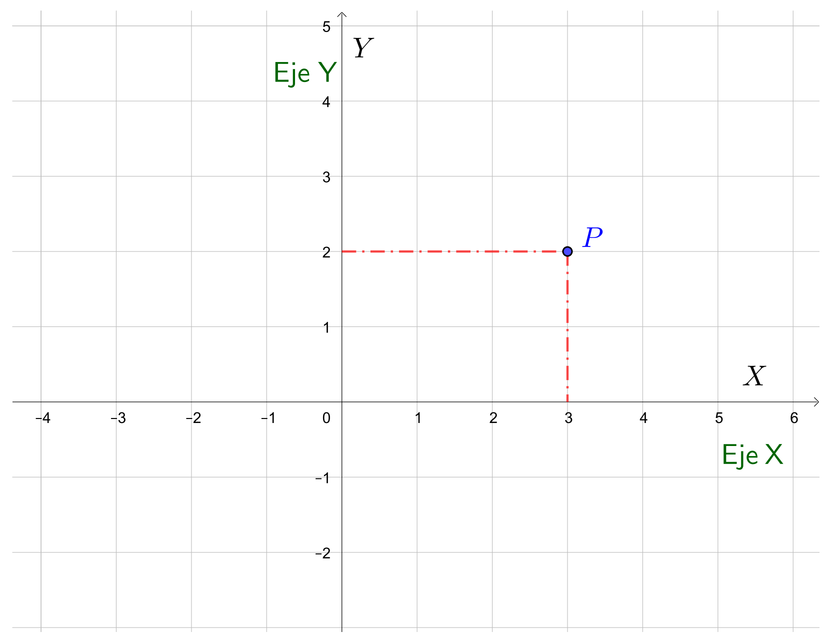
De donde,

$$\begin{aligned}
\frac{x}{x^2-x-6}-\frac{1}{x+2}-\frac{2}{x-3} &= \frac{x}{(x-3)(x+2)}-\frac{1}{(x+2)}\frac{(x-3)}{(x-3)}-\frac{2}{(x-3)}\frac{(x+2)}{(x+2)}\\
&= \frac{x-x+3-2x-4}{(x-3)(x+2)}\\
&= \frac{-1-2x}{(x-3)(x+2)}\\
&= -\frac{2x+1}{(x+2)(x-3)}
\end{aligned}$$

3.6. Plano cartesiano

El plano cartesiano, es un plano dividido en cuatro partes por dos ejes perpendiculares como puede ver en la figura 3.1.

Figura 3.1: Plano cartesiano



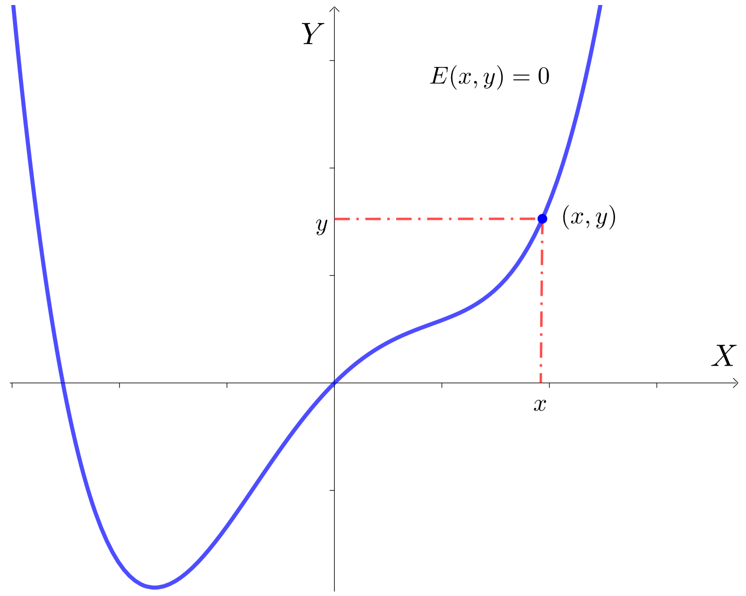
El conjunto $\mathbb{R}^2$, es identificado con el plano cartesiano debido a que cada par ordenado de $\mathbb{R}^2$, es representado con un solo punto en el plano cartesiano. Por ejemplo el par ordenado $(3, 2)$ es representado por P, en el plano cartesiano como puede verse en la figura 3.1 y es ubicado desplazando 3 unidades a la derecha desde el origen y luego 2 unidades hacia arriba. Los subconjuntos de $\mathbb{R}^2$, se esbozan en el plano cartesiano, dichos subconjuntos son llamados gráficos de ecuaciones de dos variables o una variable. Generalmente, los gráficos de ecuaciones se dibujan tabulando valores y luego deslizando con un lapicero sobre puntos tabulados en el plano cartesiano.
Considere la ecuación de dos variables:

$$\boxed{E(x, y) = 0,} \tag{3.32}$$

donde x y y son variables. Entonces la gráfica de la ecuación $E(x, y) = 0$, queda definida por:

$$\boxed{\{(x, y) : E(x, y) = 0\}.} \tag{3.33}$$

Figura 3.2: Gráfica de la ecuación $E(x,y)=0$.



Ejemplo 3.6.1

Gráfica la ecuación

$$2x-y-10=0 \tag{3.34}$$

Solución. *Despejando la variable y en la ecuación se tiene*

$$y=2x-10 \tag{3.35}$$

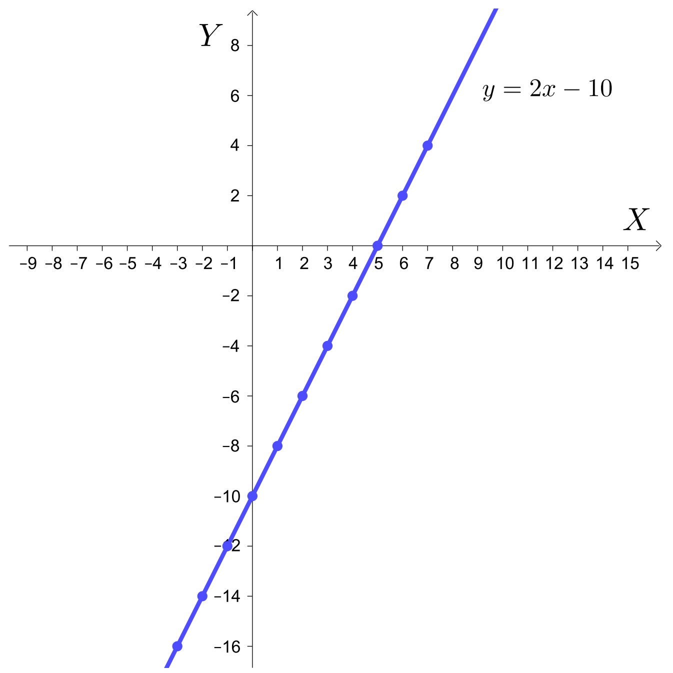
Ahora, tabulemos los valores en la siguiente tabla:

x	$y=2x-10$	(x,y)
-3	$y=2(-3)-10=-16$	$(-3,16)$
-2	$y=2(-2)-10=-14$	$(-2,-14)$
-1	$y=2(-1)-10=-12$	$(-1,-12)$
0	$y=2(0)-10=-10$	$(0,-10)$
1	$y=2(1)-10=-8$	$(1,-8)$
2	$y=2(2)-10=-6$	$(2,-6)$
3	$y=2(3)-10=-4$	$(3,-4)$
4	$y=2(4)-10=-2$	$(4,-2)$
5	$y=2(5)-10=0$	$(5,0)$
6	$y=2(6)-10=2$	$(6,2)$
7	$y=2(7)-10=4$	$(7,4)$

Tabla 3.1: Puntos tabulados.

Hay infinitos puntos (x,y), que satisfacen la ecuación (3.34), dibujamos los puntos tabulados en el plano cartesiano y luego unimos los puntos deslizando el lapicero sobre ellos para así, obtener una recta como se ve la figura 3.3.

Figura 3.3: Gráfica de la ecuación $y = 2x - 10$.



Ejemplo 3.6.2

Gráfica la ecuación

$$y + |x| - 1 = 0 \tag{3.36}$$

Solución. *Despejamos la variable y en la ecuación:*

$$y + |x| - 1 = 0 \Longleftrightarrow y = -|x| + 1 \tag{3.37}$$

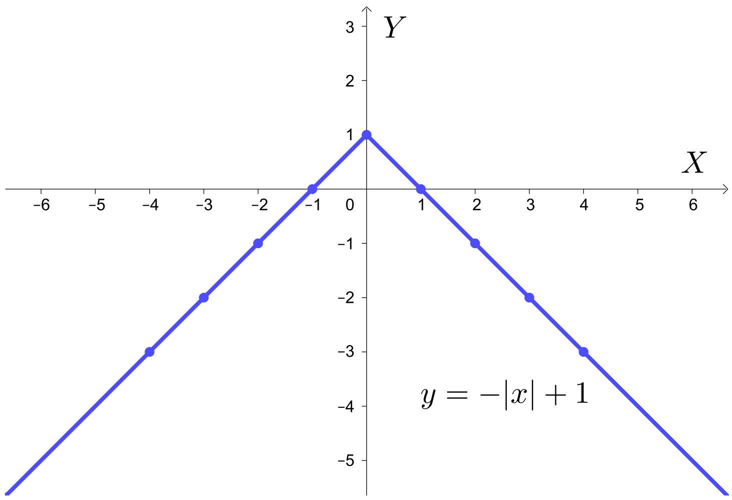
Tabulamos los valores de x e y:

x	$y = -\|x\| + 1$	(x, y)
-4	$y = -\|-4\| + 1 = -3$	$(-4, -3)$
-3	$y = -3\|-3\| + 1 = -2$	$(-3, -2)$
-2	$y = -\|-2\| + 1 = -1$	$(-2, -1)$
-1	$y = -\|-1\| + 1 = 0$	$(-1, 0)$
0	$y = -\|0\| + 1 = 1$	$(0, 1)$
1	$y = -\|1\| + 1 = 0$	$(1, 0)$
2	$y = -\|2\| + 1 = -1$	$(2, -1)$
3	$y = -\|3\| + 1 = -2$	$(3, -2)$
4	$y = -\|4\| + 1 = -3$	$(4, -3)$

Tabla 3.2: Puntos tabulados.

El gráfico es simétrica con respecto a eje Y:

Figura 3.4: Gráfica de la ecuación $y = -|x| + 1$.



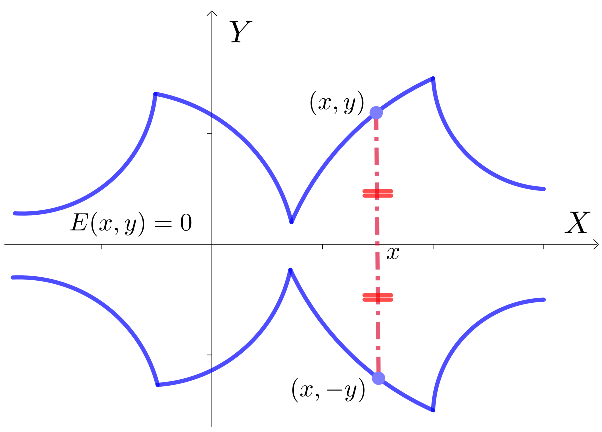
3.7. Simetría de gráficos

Simetría:

S1) Simetría con respecto al eje X. El gráfico de la ecuación $E(x, y) = 0$, es simétrico con eje X si:

$$E(x, y) = 0 \Longrightarrow E(x, -y) = 0 \tag{3.38}$$

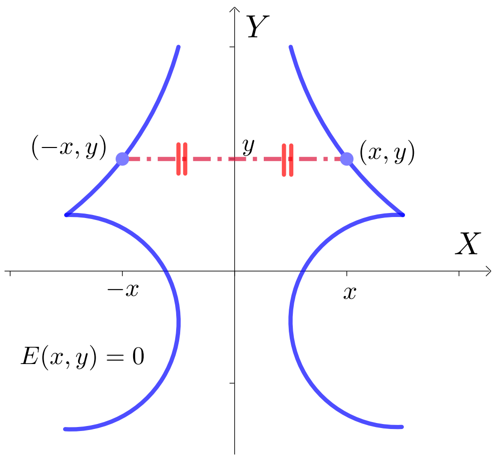
Figura 3.5: Gráfica de la ecuación $E(x, y) = 0$.



S2) Simetría con respecto al eje Y. El gráfico de la ecuación $E(x, y) = 0$, es simétrico con eje Y si:

$$E(x,y)=0 \Longrightarrow E(-x,y)=0 \tag{3.39}$$

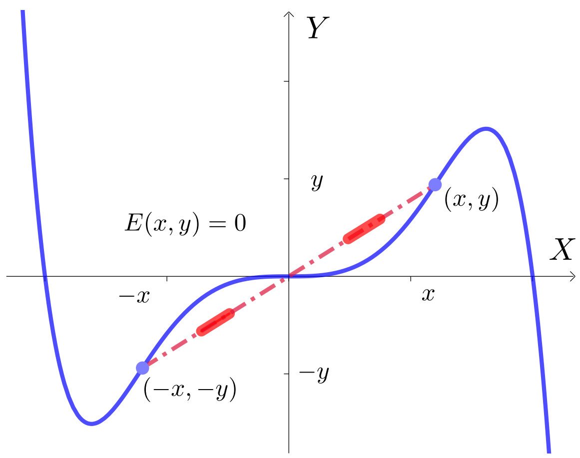
Figura 3.6: Gráfica de la ecuación $E(x,y)=0$.



S3) Simetría con respecto al origen. El gráfico de la ecuación es simétrico con el origen si:

$$E(x,y)=0 \Longrightarrow E(-x,-y)=0 \tag{3.40}$$

Figura 3.7: Gráfica de la ecuación $E(x,y)=0$.



Ejemplo 3.7.1

Pruebe la simetría de la ecuación $y = x^2 + 1$ y trace la gráfica.
Solución. *Como*

$$y = x^2 + 1 \iff y - x^2 - 1 = 0$$

entonces considere la ecuación $E(x, y) = 0$, donde $E(x, y) = y - x^2 - 1$.

1. $E(x, y) = y - x^2 - 1 = 0 \Longrightarrow E(x, -y) = -y - x^2 - 1 = -2y$
2. $E(x, y) = y - x^2 - 1 = 0 \Longrightarrow E(-x, y) = y - (-x)^2 - 1 = y - x^2 - 1 = 0$
3. $E(x, y) = y - x^2 - 1 = 0 \Longrightarrow E(-x, -y) = -y - (-x)^2 - 1 = -y - x^2 - 1 = -2y$

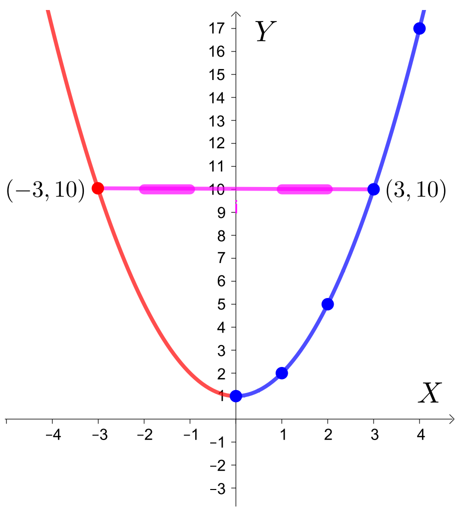
El $(-x, y)$ satisface la definición de simetría en la ecuación. Por lo tanto, la ecuación $y = x^2 + 1$, es simétrica con eje Y. Ahora, tabulamos

x	$y = x^2 + 1$	(x, y)
0	$y = 0^2 + 1 = 1$	$(0, 1)$
1	$y = 1^2 + 1 = 2$	$(1, 2)$
2	$y = 2^2 + 1 = 5$	$(2, 5)$
3	$y = 3^2 + 1 = 10$	$(3, 10)$
4	$y = 4^2 + 1 = 17$	$(4, 17)$

Tabla 3.3: Puntos tabulados.

Se traza el gráfico del lado derecho de la figura 3.8 y como es simétrica sobre eje Y, se dibuja el lado izquierda formando una parábola.

Figura 3.8: Gráfica de la ecuación $y = x^2 + 1$.



Ejemplo 3.7.2

Verifique la simetría de la ecuación $x = y^2 - 2$, dibuje la gráfica.

Solución.

La otra forma para verificar la simetría es reemplazar a la ecuación $-y$ en vez de y y mantener la variable x:

$$x = (-y)^2 - 2 = y^2 - 2$$

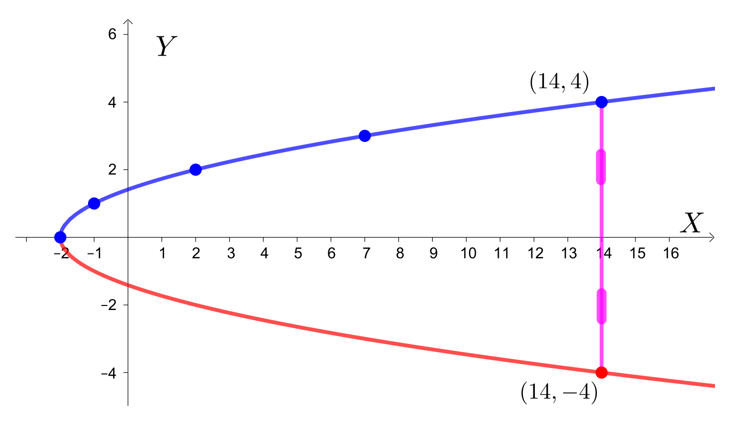
se observa que se obtiene la misma ecuación dada en el ejemplo, por lo que el gráfico es simétrico con eje X.

y	$x = y^2 - 2$	(x, y)
0	$x = 0^2 - 2 = -2$	$(-2, 0)$
1	$x = 1^2 - 2 = -1$	$(-1, 1)$
2	$x = 2^2 - 2 = 2$	$(2, 2)$
3	$x = 3^2 - 2 = 7$	$(7, 3)$
4	$x = 4^2 - 2 = 14$	$(14, 4)$

Tabla 3.4: Puntos tabulados.

A partir del gráfico de color azul se dibuja el de color rojo ya que es simétrica con respecto al eje X.

Figura 3.9: Gráfica de la ecuación $x = y^2 - 2$.



Ejemplo 3.7.3

Verifique simetría de la ecuación $y = x^5 - 10x^3$ y trace su gráfica.

Solución.

Para verificar simetría con respecto al origen reemplacemos x por $-x$ y y por $-y$

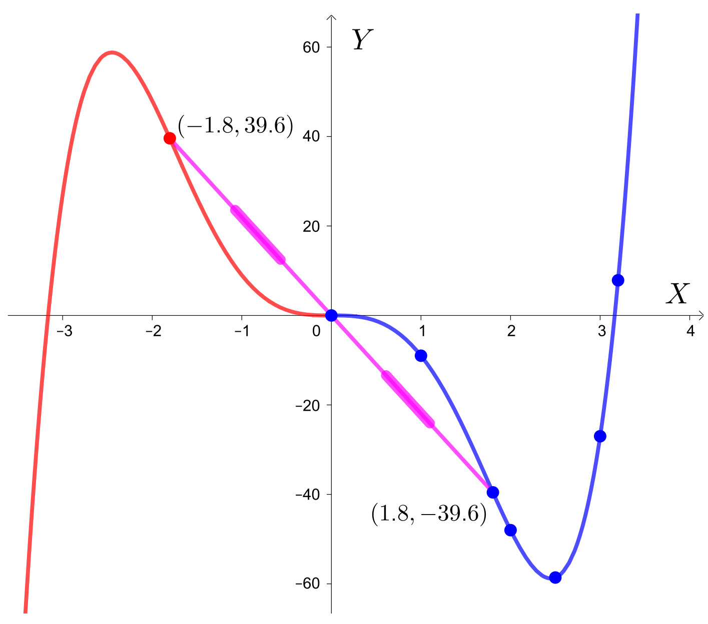
en la ecuación:

$$\begin{aligned} -y =&(-x)^5 - 10(-x)^3 \\ =&-x^5 + 10x^3 \\ =&-(x^5 - 10x^3) \end{aligned}$$

x	$y = x^5 - 10x^3$	(x, y)
0	$y = 0^5 - 10(0)^3 = 0$	$(0, 0)$
1	$y = 1^5 - 10(1)^3 = -9$	$(1, -9)$
1.8	$y = 1.8^5 - 10(1.8)^3 = -39.42$	$(1.8, -39.42)$
2	$y = 2^5 - 10(2)^3 = -48$	$(2, -48)$
2.5	$y = 2.5^5 - 10(2.5)^3 = -58.59$	$(2.5, -58.59)$
3	$y = 3^5 - 10(3)^3 = -27$	$(3, -27)$
3.2	$y = 3.2^5 - 10(3.2)^3 = 7.86$	$(3.2, 7.86)$

Tabla 3.5: Puntos tabulados.

Figura 3.10: Gráfica de la ecuación $y = x^5 - 10x^3$.



3.8. Ejercicios propuestos

Tarea para casa:

✍1. Demostrar:

a) $(x)[(-y)(z)] = -xyz$

b) $(-x)[y + (-z)] = xz - xy$

c) $(-x)[(-y) + (-z) + (-w)] + x(-z) = xy + xw$

✍2. Demuestre que si $xyz \neq 0$ entonces

$$(-xyz)^{-1} = -x^{-1}y^{-1}z^{-1}$$

✍3. Demostrar:

a) $(x + y)(z + w) = xz + xw + yz + yw$

b) $(x - y)(z - w) = (xz + yw) - (xw + yz)$

✍4. Demostrar que: $\dfrac{x}{y} + \dfrac{z}{w} + \dfrac{u}{v} = \dfrac{xwv + zyv + ywu}{ywv}$, para todo $x, y, z, w, u, v \in \mathbb{R}$, con $y \neq 0$, $w \neq 0$ y $v \neq 0$.

✍5. Pruebe que: $\dfrac{\dfrac{x}{y} \div \dfrac{z}{w}}{\dfrac{u}{v} \div \dfrac{t}{s}} = \dfrac{xwvt}{yzus}$, con $yzuswv \neq 0$.

✍6. Para todos $x, y, z, w \in \mathbb{R}$, demuestre que:

a) $(x - y) + (z - w) = (x + z) - (y + w)$

b) $(x - y) + (y - z) + (z - w) = x - w$

c) $(x - y) - (z - w) = (x + w) - (y + z)$

d) $(x - y)(z - w) = (xz + yw) - (xw + yz)$

e) $x - y = z - w$ si y sólo si $x + w = z + y$

f) $(x - y)z = xz - yz$

g) $(x - y + z)w = xw - yw + zw$

✍7. Sean $x, y \in \mathbb{R}$. Pruebe que:si $x \leq y \leq x$, entonces $x = y$.

✍8. Pruebe que:

$$x^2 < x^3 \iff x > 1$$

✍9. Pruebe las siguientes afirmaciones:

a) $x \neq 0 \Longrightarrow x^2 > 0$

b) $x, z > 0 \wedge y \in \mathbb{R}, xy = z \Longrightarrow y > 0$

c) $x < y \wedge z < w \Longrightarrow x + z < y + w$

d) $0 < x < y \wedge 0 < z \leq w \Longrightarrow xz < yw$

✍**10.** Para todos $x, y, z > 0$, demuestre las siguientes desigualdades:

a) $\dfrac{yz}{x} + \dfrac{xz}{y} + \dfrac{xy}{z} \geq (x + y + z)$

b) $\dfrac{2}{y+z} + \dfrac{2}{z+x} + \dfrac{2}{x+y} \geq \dfrac{9}{x+y+z}$

c) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} \geq \dfrac{1}{\sqrt{yz}} + \dfrac{1}{\sqrt{zx}} + \dfrac{1}{\sqrt{xy}}$

✍**11.** Demuestre que:

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + xz + yz,$$

para todo x, y y z.

✍**12.** Demuestre que:

$$(x^3 - y^3)^2 \geq (x^2 - y^2)(x^4 - y^4) \text{ y}$$
$$(x^2 + y^2)(x^4 + y^4) \geq (x^3 + y^3)^2$$

para todo x e y.

✍**13.** Demuestre que si x, y y z, w son positivos (y z y w son racionales), entonces

$$(x^z - y^z)(x^w - y^w) \geq 0 \text{ y}$$
$$x^{z+w} + y^{z+w} \geq x^z y^w + x^w y^z.$$

✍**14.** Demostrar que: $(x^n)^{-1} = x^{-n}$, para todo $x \neq 0$. Considere la definición $x^n = \underbrace{x.x.x\ldots x}_{n\ veces}$, con $n \in \mathbb{N}$.

✍**15.** Pruebe que:

a) $x^{m+n+l} = x^m \cdot x^n \cdot x^l$;

b) $[(x^n)^m]^l = x^{nml}$.

c) $(x \cdot y \cdot z)^n = x^n \cdot y^n \cdot z^n$

d) $\left(\dfrac{xy}{zw}\right)^n = \dfrac{x^n y^n}{z^n w^n}$

e) $(x^n \cdot y^m)^l = x^{nl} \cdot y^{ml}$

✍**16.** Verifique la veracidad o la falsedad de cada una de las proposiciones siguientes. Justifique su respuesta.

a) $(x + y)^2 = x^2 + y^2$

b) $(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

c) $(x + y)^3 + (x - y)^3 = 2x(x^2 + 3y^2)$

d) $\dfrac{x/y}{z} = \dfrac{x}{z} \cdot \dfrac{1}{y}$

e) $\dfrac{-x}{-y} = -\dfrac{x}{y}$

f) $\dfrac{x+y}{x} = y + 1$

g) $\dfrac{x}{y} \div \dfrac{z}{w} = \dfrac{x \div z}{y \div w}$

h) $\sqrt{xyz} = \sqrt{x}\sqrt{y}\sqrt{z}$

i) $\sqrt[8]{x^8} = x$

j) $\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[5]{7}}} = \sqrt[30]{7}$

k) $\forall x, x \neq 0,\ \dfrac{x}{0} = 0$

l) $(-1)^n = 1$, $\forall n$ par.

m) $(-1)^{2n} + (-1)^{2n+1} = 0$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

✍**17.** Simplificar las siguientes expresiones:

a) $\dfrac{x^2y^{-3}z^{23}}{x^{12}y^{-4}z^{22}}$

b) $\dfrac{x^{-9}y^{78}z^{-8}y^{-67}}{x^2y^{94}z^{-12}}$

c) $\dfrac{x^3y^6z^5w^{-3}y^{-7}}{x^2y^4z^{-3}w^3}$

d) $\left(\dfrac{xy^2}{z^2}\right)^2\left(\dfrac{zx^2}{y}\right)^4$

e) $\left(\dfrac{wx^3y^2}{z^2}\right)^5\left(\dfrac{zx^2}{yw}\right)^3$

f) $\left(\dfrac{xy^2z^{-4}}{x^2yz^{-3}}\right)^2\left(\dfrac{y^3zx^{-4}}{z^2y}\right)^{-1}$

g) $\left(\dfrac{x^3y^2z^{-4}w}{x^2yz^{-3}}\right)^{-2}\left(\dfrac{y^{-2}zx^{-4}w}{z^{-3}y}\right)^2\left(x^{-5}y^{-4}\right)^{-2}$

h) $\sqrt[4]{x^{20}\sqrt[2]{x^{12}\sqrt[3]{x^{21}}}}$

i) $\sqrt[3]{x^{12}\sqrt[7]{x^{14}\sqrt[5]{x^5}}}$

j) $\sqrt{x^7\sqrt[3]{x^{22}\sqrt[5]{x^{19}\sqrt[6]{x^{36}}}}} \div \sqrt[5]{x^{21}\sqrt{x^6\sqrt[5]{x^{10}}}}$

k) $\left(\sqrt[9]{x\sqrt[3]{x^{27}}}\right)\left(\sqrt[6]{x^{24}\sqrt[8]{x^{16}}}\right)$

l) $\left(\sqrt[3]{x^{81}\sqrt[3]{x^{27}}}\right)^4\left(\sqrt[6]{x^{24}\sqrt[3]{x^{12}}}\right)^{-2}\left(\sqrt[4]{x^{-32}\sqrt[16]{x^{144}}}\right)^8\left(\sqrt[3]{x^{27}\sqrt[4]{x^{-64}}}\right)$

✍**18.** Racionalizar los numeradores de las siguientes expresiones:

a) $\sqrt{9}-\sqrt{7}$

b) $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}$

c) $\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}$

d) $\dfrac{\sqrt[3]{11}+1}{12\sqrt[3]{121}}$

e) $\dfrac{2-\sqrt[3]{4+\sqrt{x+1}}}{4-\sqrt{x+1}}$

f) $\dfrac{-2\sqrt[3]{2x^2+2}+\sqrt[3]{x^4+2x^2+1}+\sqrt[3]{4}}{x^2-2x+1}$

✍**19.** Racionalizar los denominadores de las siguientes expresiones:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{11}}$

b) $\dfrac{4}{\sqrt{9}+\sqrt{5}}$

c) $\dfrac{24}{\sqrt[5]{12}}$

d) $\dfrac{1}{3-\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{15}}$

e) $\dfrac{\sqrt{5}-5}{(2-\sqrt{5})(7+\sqrt{5})}$

f) $\dfrac{1-\sqrt[3]{11}}{1+\sqrt[3]{11}}$

g) $\dfrac{\sqrt{x+4}-\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+4}+\sqrt{x+2}}$

h) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2+8}-2}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x+27}-3}$

i) $\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}$

✍**20.** Demuestre que si los valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son todos no negativos y si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ son enteros positivos entonces

$$\frac{\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+\ldots+\lambda_n x_n}{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n} \leq \left(x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2}\ldots x_n^{\lambda_n}\right)^{\frac{1}{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n}}$$

Consecuentemente, si $r_1, r_2, \ldots, r_n$ son fracciones propias que satisfacen $r_1+r_2+\ldots+r_n=1$ entonces

$$r_1x_1+r_2x_2+\ldots+r_nx_n \geq x_1^{r_1}x_2^{r_2}\ldots x_n^{r_n}$$

✍**21.** Sean x y y reales positivos. Pruebe que:

$$x^2 + y^2 + 1 > x\sqrt{y^2+1} + y\sqrt{x^2+1}$$

✍**22.** Simplificar: $\dfrac{(x^2)^{20}(x^{-3})^{10} \cdot (x^3)^{-2} \cdot (x^5)^{-2}}{(x^{10})^2 \cdot (x^{-2})^5 \cdot (x^{10})^{-4} \cdot x^{30}}$

✍**23.** Simplificar: $\left(\dfrac{z^5}{x^2}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{x}{y}\right)^{20} \cdot \left(\dfrac{xy}{z}\right)^{10} \cdot (xyz)^5 \div \left(\dfrac{x}{y^2}\right)^{-3} \cdot \left(\dfrac{z}{y}\right)^{-4}$

✍**24.** Pruebe que el número $\sqrt{2}$, es irracional.

✍**25.** Pruebe que $\sqrt{2} + \sqrt{5}$, es irracional.

✍**26.** Sean $x, y \in \mathbb{R}$, con $x < y$. Demuestre que existe un número irracional z tal que $x < z < y$. Concluya que, no existe el menor número irracional positivo.

✍**27.** Factorizar las siguientes expresiones:

a) $2x^2 - x^3 + x - 2$

b) $x^3 - 6x^2 - x + 30$

c) $x^3 - 4x^2 + x + 6$

d) $x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 24x$

e) $x^5 + 17x^4 + 65x^3 + 55x^2 - 66x - 72$

f) $x^4 - 5x^3 - 15x^2 + 5x + 14$

g) $6x^4 + 25x^3 + 27x^2 - 4$

h) $24x^5y^8z^{12} - 144x^3y^5z^8 + 48x^2y^7z^4$

i) $27x^{-5}y^2z^{-2} + 81x^{-3}y^2z^3 - 27x^{-2}y^{-2}z^3$

j) $x^{-3/2} + 3x^{-5/2} - 88x^{-7/2}$

k) $x^{9/7} + 10x^{2/7} - 39x^{-5/7}$

l) $3x^2(2x+1)^{-3/8} - 7(2x+1)^{5/8} + 2(2x+1)^{-3/8}$

✍**28.** Verificar simetría y graficar las siguientes ecuaciones:

a) $-x^4 + x^2 + y^2 = 3$

b) $y = x^3 - x$

c) $y = x^4 - 2x^2$

d) $y^8 = y^4 - 3x$

e) $y = x^7 - x^5 - x$

f) $(x-7)^2 + y^2 = 25$

4

Ecuaciones e inecuaciones

En el capítulo, el estudiante debe ser capaz de resolver cualquier ejercicio relacionado a ecuaciones e inecuaciones de una sola variable. La teoría del capítulo está basada en los libros [4, 5, 26].

4.1. Ecuaciones lineales

Definición 4.1.1

Una ecuación lineal, está dada por:

$$\boxed{Ax + B = 0, A \neq 0} \tag{4.1}$$

Ejemplo 4.1.1

Resolver: $3x - 8 = 7$

Solución.

$$\begin{aligned} 3x - 8 = 7 &\Longleftrightarrow (3x-8) + 8 = 7 + 8 \\ &\Longleftrightarrow 3x + \cancelto{0}{((-8) + 8)} = 15 \\ &\Longleftrightarrow 3x + 0 = 15 \\ &\Longleftrightarrow 3x = 15 \\ &\Longleftrightarrow x = \frac{15}{3} \\ &\Longleftrightarrow x = 5 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\mathrm{CS} = \{5\}$$

Ejemplo 4.1.2

Resolver: $5x + 8 = 15 + 5x$

Solución.

$$\cancel{5x} + 8 = 15 + \cancel{5x} \Longleftrightarrow 8 = 15 \text{ (Falso)}$$

Por consiguiente,

$$\text{CS} = \{\}$$

Ejemplo 4.1.3

Resolver:

$$\frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{2}(3x-2)\right] = \frac{2}{3}x - \frac{1}{4} \tag{4.2}$$

Solución.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{2}(3x-2)\right] &= \frac{2}{3}x - \frac{1}{4}\\
\frac{1}{2} + \frac{1}{4}(3x-2) &= \frac{2}{3}x - \frac{1}{4}\\
\cancel{\frac{1}{2}} + \frac{3}{4}x - \cancel{\frac{1}{2}} &= \frac{2}{3}x - \frac{1}{4}\\
\frac{3}{4}x - \frac{2}{3}x &= -\frac{1}{4}\\
\frac{9x-8x}{12} &= -\frac{1}{4}\\
x &= -\frac{12}{4}\\
x &= -3
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\text{CS} = \{-3\}$$

Ejemplo 4.1.4

Resolver:

$$(x+4)(x-3) = (x-7)(x+5) + 3 \tag{4.3}$$

Solución.

$$\begin{aligned}
(x+4)(x-3) &= (x-7)(x+5) + 3\\
\cancel{x^2} + x - 12 &= \cancel{x^2} - 2x - 35 + 3\\
x - 12 &= -2x - 32\\
3x &= -20\\
x &= -\frac{20}{3}
\end{aligned}$$

Consecuentemente,

$$\text{CS} = \{-\frac{20}{3}\} \tag{4.4}$$

Ejemplo 4.1.5

Resolver:

$$\frac{x-1}{4x+4}=\frac{1}{8}-\frac{x-3}{6x+6} \tag{4.5}$$

Solución.

$$\begin{aligned}
\frac{x-1}{4x+4}&=\frac{1}{8}-\frac{x-3}{6x+6}\\
\frac{x-1}{4\cancel{(x+1)}}&=\frac{3(x+1)-4(x-3)}{24\cancel{(x+1)}}\\
\frac{x-1}{\cancelto{1}{4}}&=\frac{3x+3-4x+12}{\cancelto{6}{24}}, x\neq -1\\
6(x-1)&=-x+15\\
6x-6&=-x+15\\
7x&=21\\
x&=3
\end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\mathrm{CS}=\{3\} \tag{4.6}$$

Ejemplo 4.1.6

Rodrigo tiene 12,000 dólares para invertir. Si invierte una parte al 10 % y el resto al 15 %, ¿qué cantidad debe invertir a cada tipo para obtener 12 % sobre el total invertido?

Solución.

Sean

$$\begin{aligned}
x&=\text{cantidad invertida a } 10\,\%\\
12,000-x&=\text{cantidad invertida a } 15\,\%
\end{aligned}$$

El total invertido se obtiene de $12\,\%$ *de* $12,000$ *dolares entonces*

$$\begin{aligned}
0.1x+0.15(12,000-x)=0.12(12,000)&\implies -0.05x=-0.03(12,000)\\
&\implies x=\frac{3(12,000)}{5}\\
&\implies x=7200
\end{aligned}$$

Por lo tanto, invierte 7200 *al* $10\,\%$ *y* 4800 *al* $15\,\%$.

Ejemplo 4.1.7

Una empresa de refinación de trigo produce gluten para alimento de ganado, con un costo variable de $S/102$ *por tonelada. Si los costos fijos son* $S/120,000$ *al mes y el alimento se vende a* $S/134$ *la tonelada, ¿cuántas toneladas deben venderse al*

mes para que la compañía obtenga una utilidad mensual de $S/560,000$?
Solución.
Sea x cantidad de toneladas vendidas al mes. Entonces el costo variable es $102x$ y ingreso total es $134x$. Como

$$\text{Utilidad} = \text{Ingreso total} - \text{Costo total}$$

entonces el modelo del problema es:

$$134x - (102x + 120,000) = 560,000 \tag{4.7}$$

Resolviendo se obtiene:

$$\begin{aligned} 134x - (102x + 120,000) &= 560,000 \\ 32x &= 560,000 + 120,000 \\ x &= \frac{680,000}{32} \\ x &= 21,250 \end{aligned}$$

4.2. Ecuaciones cuadráticas

Definición 4.2.1

Una ecuación cuadrática, es de la forma:

$$\boxed{Ax^2 + Bx + C = 0, A \neq 0} \tag{4.8}$$

Teorema 4.2.1

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall y \geq 0$,
$$x^2 = y \iff x = \pm\sqrt{y} \tag{4.9}$$
2. $x^2 = y^2 \iff (x = y \vee x = -y)$

Ejemplo 4.2.1

Resolver: $(2x - 12)^2 = 4$
Solución. *Aplicando el teorema 4.2.1,*

$$\begin{aligned} (2x-12)^2 = 4 &\iff 2x - 12 = \pm\sqrt{4} \\ &\iff 2x - 12 = \pm 2 \\ &\iff x = \frac{12 \pm 2}{2} \\ &\iff x = 7 \vee x = 5 \end{aligned}$$

Por lo tanto,
$$\text{CS} = \{5, 7\}$$

Ejemplo 4.2.2

Resolver: $(x-3)^2 = -18$
Solución.
El conjunto solución en los reales es $\emptyset$*, ya que el cuadrado de un número nunca es negativo.*

Ejemplo 4.2.3

Resolver: $(2x-4)^2 = (3x-6)^2$
Solución. *Aplicando el teorema 4.2.1,*

$$\begin{aligned}(2x-4)^2 = (3x-6)^2 &\iff [2x-4 = 3x-6 \vee 2x-4 = -(3x-6)] \\ &\iff x = 2 \vee x = 2\end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\text{CS} = \{2\}$$

Ecuación cuadrática:

La ecuación

$$\boxed{Ax^2 + Bx + C = 0, A \neq 0} \tag{4.10}$$

es una ecuación cuadrática.
Completando cuadrado:

$$\begin{aligned}Ax^2 + Bx + C = 0 &\Longrightarrow A[x^2 + \frac{B}{A}x + \frac{C}{A}] = 0 \\ &\Longrightarrow [(x + \frac{B}{2A})^2 - \frac{B^2}{4A^2} + \frac{C}{A}] = 0 \\ &\Longrightarrow (x + \frac{B}{2A})^2 = \frac{B^2 - 4AC}{4A^2} \\ &\Longrightarrow x + \frac{B}{2A} = \pm\frac{B^2 - 4AC}{2A} \\ &\Longrightarrow x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}\end{aligned}$$

El valor $\Delta = B^2 - 4AC$, es llamado discriminante. Tenemos los siguientes casos:

1. Si $\Delta > 0$ entonces la ecuación 4.10, tiene conjunto solución real

$$\left\{\frac{-B + \sqrt{\Delta}}{2A}, \frac{-B - \sqrt{\Delta}}{2A}\right\} \tag{4.11}$$

2. Si $\Delta = 0$, entonces el conjunto solución real de la ecuación (4.10) es

$$\left\{-\frac{B}{2A}\right\}$$

3. Si $\triangle < 0$, entonces $-\triangle > 0$ y

$$x = \frac{-B \pm \sqrt{-(-\triangle)}}{2A} = \frac{-B \pm i\sqrt{-\triangle}}{2A} \tag{4.12}$$

El conjunto solución compleja de la ecuación (4.10) es

$$\left\{ \frac{-B + i\sqrt{-\triangle}}{2A}, \frac{-B - i\sqrt{-\triangle}}{2A} \right\}$$

Ejemplo 4.2.4

Resolver:

$$4x^2 - 12x + 7 = 0$$

Solución.
Como $A = 4$, $B = -12$ *y* $C = 7$ *entonces*

$$\triangle = (-12)^2 - 4(4)(7) = 32 > 0$$

Luego

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{32}}{2(4)} = \frac{3 \pm \sqrt{2}}{2}$$

Conjunto solución:

$$\left\{ \frac{3 - \sqrt{2}}{2}, \frac{3 + \sqrt{2}}{2} \right\}$$

Ejemplo 4.2.5

Resolver:

$$2x^2 - 7x + 11 = 0$$

Solución.
Como $A = 2$, $B = -7$ *y* $C = 11$ *entonces*

$$\triangle = (-7)^2 - 4(2)(11) = -39 < 0$$

Luego

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{-39}}{2(2)} = \frac{7 \pm i\sqrt{39}}{4}$$

Conjunto solución:

$$\left\{ \frac{7 - i\sqrt{39}}{4}, \frac{7 + i\sqrt{39}}{4} \right\}$$

Ejemplo 4.2.6

Resolver:

$$x^{-4} - 9x^{-2} = -20 \tag{4.13}$$

Solución.
Considere $u = x^{-2}$ *entonces* $u^2 = x^{-4}$ *y se tiene* $u^2 - 9u + 20 = 0$ *y luego se obtiene,*

$$\begin{aligned} u^2 - 9u + 20 = 0 &\iff (u-4)(u-5) = 0 \\ &\iff u = 4 \vee u = 5 \end{aligned}$$

Como $x^{-2} = 4$ *o* $x^{-2} = 5$ *tenemos* $x^{-1} = \pm 2$ *o* $x^{-1} = \pm\sqrt{5}$. *Por lo tanto,*

$$\mathrm{CS} = \left\{ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \right\}$$

4.3. Inecuaciones lineales

Inecuaciones:

Las inecuaciones lineales tienen la forma:

$$L_1(x) : Ax + B > 0, A \neq 0; \tag{4.14}$$
$$L_2(x) : Ax + B < 0, A \neq 0; \tag{4.15}$$
$$L_3(x) : Ax + B \geq 0, A \neq 0; \tag{4.16}$$
$$L_4(x) : Ax + B \leq 0, A \neq 0. \tag{4.17}$$

Ejemplo 4.3.1

Encontrar conjunto solución de la siguiente inecuación lineal:

$$3x - 7 < -2x + 28 \tag{4.18}$$

Solución.

$$\begin{aligned} 3x - 7 < -2x + 28 &\iff 3x + 2x < 28 + 7 \\ &\iff 5x < 35 \\ &\iff x < 7 \end{aligned}$$

Por lo tanto,
$$\mathrm{CS} = \langle -\infty, 7 \rangle$$

Ejemplo 4.3.2

Resolver:
$$3(x-1) + 5 \geq x + 2(3x-7) \tag{4.19}$$

Solución.

$$
\begin{aligned}
3(x-1)+5 &\geq x+2(3x-7)\\
3x-3+5 &\geq x+6x-14\\
3x+2 &\geq 7x-14\\
-4x &\geq -16\\
4x &\leq 16\\
x &\leq 4
\end{aligned}
$$

Por lo tanto,

$$\mathrm{CS} = \langle -\infty, 4]$$

Ejemplo 4.3.3

Determinar soluciones enteras de la inecuación:

$$\frac{3x-5}{2} < \frac{3}{4}(3-x) < \frac{1}{4}(12-2x) \tag{4.20}$$

Solución. *Aplicando* $\boxed{X < Y < Z \Longleftrightarrow X < Y \wedge Y < Z}$

$$
\begin{aligned}
\frac{3x-5}{2} < \frac{3}{4}(3-x) < \frac{1}{4}(12-2x) &\Longleftrightarrow \frac{3x-5}{2} < \frac{3}{4}(3-x) \wedge \frac{3}{4}(3-x) < \frac{1}{4}(12-2x)\\
&\Longleftrightarrow 2(3x-5) < 3(3-x) \wedge 3(3-x) < 12-2x\\
&\Longleftrightarrow 6x-10 < 9-3x \wedge 9-3x < 12-2x\\
&\Longleftrightarrow 6x+3x < 9+10 \wedge -3x+2x < 12-9\\
&\Longleftrightarrow 9x < 19 \wedge -x < 3\\
&\Longleftrightarrow x < \frac{19}{9} \wedge x > -3\\
&\Longleftrightarrow -3 < x < \frac{19}{9}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto,

$$\mathrm{CS}_{Enteras} = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

4.4. Inecuaciones cuadráticas

Inecuaciones:

Las inecuaciones cuadráticas tienen la forma:

$$
\begin{aligned}
Q_1(x) &: Ax^2+Bx+C > 0, A \neq 0; \qquad (4.21)\\
Q_2(x) &: Ax^2+Bx+C < 0, A \neq 0; \qquad (4.22)\\
Q_3(x) &: Ax^2+Bx+C \geq 0, A \neq 0; \qquad (4.23)\\
Q_4(x) &: Ax^2+Bx+C \leq 0, A \neq 0. \qquad (4.24)
\end{aligned}
$$

Ejemplo 4.4.1

Resolver: $x^2 - 6x - 72 \leq 0.$
Solución.

$$\boxed{XY \leq 0 \iff [(X \geq 0 \wedge Y \leq 0) \vee (X \leq 0 \wedge Y \geq 0)]}$$

$$\begin{aligned} x^2 - 6x - 72 \leq 0 &\iff (x-12)(x+6) \leq 0 \\ &\iff (x - 12 \geq 0 \wedge x + 6 \leq 0) \vee (x - 12 \leq 0 \wedge x + 6 \geq 0) \\ &\iff (x \geq 12 \wedge x \leq -6) \vee (x \leq 12 \wedge x \geq -6) \\ &\iff x \leq 12 \wedge x \geq -6 \\ &\iff -6 \leq x \leq 12 \end{aligned}$$

$$\text{CS} = [-6, 12]$$

Ejemplo 4.4.2

Resolver: $x^2 + 8x - 33 > 0$
Solución.

$$\begin{aligned} x^2 + 8x - 33 > 0 &\iff (x^2 + 8x + 4^2) - 4^2 - 33 > 0 \\ &\iff (x+4)^2 - 4^2 - 33 > 0 \\ &\iff (x+4)^2 - 49 > 0 \\ &\iff (x+4)^2 > 49 \end{aligned}$$

$$\boxed{(\forall Y \geq 0)[X^2 > Y \iff (X > \sqrt{Y} \vee X < -\sqrt{Y})]}$$

$$\begin{aligned} (x+4)^2 > 49 &\iff x + 4 > \sqrt{49} \vee x + 4 < -\sqrt{49} \\ &\iff x + 4 > 7 \vee x + 4 < -7 \\ &\iff x > 3 \vee x < -11 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\text{CS} = \langle -\infty, -11 \rangle \cup \langle 3, +\infty \rangle$$

Ejemplo 4.4.3

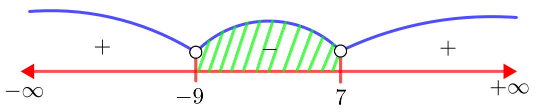
Resolver: $x^2 + 2x - 63 < 0$
Solución.

$$x^2 + 2x - 63 < 0 \iff (x+9)(x-7) < 0$$

Determinemos los puntos críticos:

$$\begin{aligned} x + 9 = 0 &\implies x = -9 \\ x - 7 = 0 &\implies x = 7 \end{aligned}$$

Figura 4.1: Puntos críticos



Conjunto solución:

$$\text{CS} = \langle -9, 7 \rangle$$

Ejemplo 4.4.4

Resolver:

$$4x^2 - 6\sqrt{x^2+x+3} + 4x = 6 \tag{4.25}$$

Solución.

$$\begin{aligned} 4x^2 - 6\sqrt{x^2+x+3} + 4x = 6 &\iff 4(x^2+x+3) - 12 - 6\sqrt{x^2+x+3} = 6 \\ &\iff 4(x^2+x+3) - 6\sqrt{x^2+x+3} = 18 \\ &\iff 2(x^2+x+3) - 3\sqrt{x^2+x+3} = 9 \end{aligned}$$

Sustituyendo $\alpha = \sqrt{x^2+x+3}$ *con* $\alpha \geq 0$, *obtenemos*

$$\begin{aligned} 2\alpha^2 - 3\alpha - 9 = 0 &\iff (2\alpha+3)(\alpha-3) = 0 \\ &\iff 2\alpha + 3 = 0 \vee \alpha - 3 = 0 \\ &\iff \alpha = -\frac{3}{2} \vee \alpha = 3 \end{aligned}$$

Como $\alpha \geq 0$, *se obtiene un solo caso* $\alpha = 3$ *y luego*

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2+x+3} = \alpha = 3 &\iff x^2 + x + 3 = 9 \\ &\iff x^2 + x - 6 = 0 \\ &\iff (x+3)(x-2) = 0 \\ &\iff x = -3 \vee x = 2 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\text{CS} = \{-3, 2\}$$

4.5. Inecuaciones racionales

Inecuaciones:

Las inecuaciones racionales tienen la forma:

$$R_1(x) : \frac{P(x)}{Q(x)} > 0, \tag{4.26}$$

$$R_2(x) : \frac{P(x)}{Q(x)} < 0, \tag{4.27}$$

$$R_3(x) : \frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0, \tag{4.28}$$

$$R_4(x) : \frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0, \tag{4.29}$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$, polinomios no nulos con coeficientes reales.

Ejemplo 4.5.1

Resolver:

$$\frac{3x-5}{x-7} \geq 2 \tag{4.30}$$

Solución.

$$\begin{aligned} \frac{3x-5}{x-7} \geq 2 &\iff \frac{3x-5}{x-7} - 2 \geq 0 \\ &\iff \frac{3x-5-2(x-7)}{x-7} \geq 0 \\ &\iff \frac{x+9}{x-7} \geq 0 \end{aligned}$$

Calculemos los puntos críticos:

$$\begin{aligned} x+9=0 &\Longrightarrow x=-9 \\ x-7=0 &\Longrightarrow x=7 (\textit{No se considera}) \end{aligned}$$

$$\text{CS} = \langle -\infty, -9] \cup \langle 7, +\infty \rangle$$

Ejemplo 4.5.2

Resolver:

$$\frac{(4x+2)^{2222}(x^2+1)^{313}(2x-8)^{9197}}{(x+1)^{2222}(2x+5)^{13331}} < 0 \tag{4.31}$$

Solución.

Primera forma: *Como* $x^2+1>0$ *tenemos*

$$\begin{aligned}\frac{(4x+2)^{2222}(x^2+1)^{313}(2x-8)^{9197}}{(x+1)^{2222}(2x+5)^{13331}}<0 &\iff \frac{2x-8}{2x+5}<0\wedge 4x+2\neq 0\wedge x+1\neq 0\\ &\iff \frac{2x-8}{2x+5}<0\wedge x\neq -\frac{1}{2}\wedge x\neq -1\\ &\iff x\in\langle-\frac{5}{2},4\rangle\wedge x\neq -\frac{1}{2}\wedge x\neq -1\\ &\iff x\in\langle-\frac{5}{2},4\rangle-\{-\frac{1}{2},-1\}\end{aligned}$$

Segunda forma:
Aplicando regla de signo:

Figura 4.2: Regla de signo

	$-\infty$	$-\frac{5}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	4 $+\infty$
$(4x+2)^{2222}$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$(2x-8)^{9197}$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
$(x+1)^{2222}$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$(2x+5)^{13331}$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
$(x^2+1)^{313}$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$\frac{(4x+2)^{2222}(x^2+1)^{313}(2x-8)^{9197}}{(x+1)^{2222}(2x+5)^{13331}}$	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$

Como la expresión izquierda de la inecuación (4.31) es menor que cero, entonces la solución de la inecuación será todas las partes negativas del último casillero de la figura 4.2, excepto los valores $x=-\frac{5}{2}$,$x=4$,$x=-1$ *y* $x=-\frac{1}{2}$, *es decir,*

$$\text{CS}=\langle-\frac{5}{2},4\rangle-\{-1,-\frac{1}{2}\}$$

Ejemplo 4.5.3

Resolver:

$$\frac{(x^2-2x+4)^5(1-x)^{355}(x+2)^{888}}{(2x+1)^{111}(x+4)^{13}x^{26}}\geq 0 \qquad (4.32)$$

Solución.

Primera forma:

Como $x^2 - 2x + 4 = (x-1)^2 + 3 > 0$ *entonces*

$$\frac{(x^2-2x+4)^5(1-x)^{355}(x+2)^{888}}{(2x+1)^{111}(x+4)^{13}x^{26}} \geq 0 \iff \frac{1-x}{(2x+1)(x+4)x^{26}} \geq 0 \vee x = -2$$

$$\iff \left[\frac{x-1}{(2x+1)(x+4)} \leq 0 \wedge x \neq 0\right] \vee x = -2$$

$$\iff x \in \langle -\infty, -4\rangle \cup \{-2\} \cup \langle -\frac{1}{2}, 0\rangle \cup \langle 0, 1]$$

Segunda forma:

Figura 4.3: Regla de signo

$-\infty$ $\quad -4 \quad -2 \quad -\frac{1}{2} \quad 0 \quad 1 \quad +\infty$

$(1-x)^{355}$	+	+	+	+	+	−
$(x+2)^{888}$	+	+	+	+	+	+
$(2x+1)^{111}$	−	−	−	+	+	+
$(x+4)^{13}$	−	+	+	+	+	+
x^{26}	+	+	+	+	+	+
$\frac{(x^2-2x+4)^5(1-x)^{355}(x+2)^{888}}{(2x+1)^{111}(x+4)^{13}x^{26}}$	+	−	−	+	+	−

Los valores positivos conjuntamente con puntos sombreados de color rojo en la figura 4.3, son soluciones de la inecuación dada ya que, es mayor o igual que 0, es decir,

$$\text{CS} = \langle -\infty, -4\rangle \cup \langle -\frac{1}{2}, 0\rangle \cup \langle 0, 1] \cup \{-2\}$$

4.6. Ecuaciones con radicales

Ecuaciones:

Las ecuaciones radicales tiene la forma:

$$W(x) : \sqrt{Q(x)} = P(x), \tag{4.33}$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$, son polinomios con coeficientes reales o otras expresiones.

Teorema 4.6.1

$$\boxed{\sqrt{Q(x)} = P(x) \iff Q(x) \geq 0 \wedge (P(x) \geq 0 \wedge Q(x) = P(x)^2)} \tag{4.34}$$

Demostración. *Ejercicio.*

Ejemplo 4.6.1

Resolver:

$$\sqrt{6+x-x^2} = x-3 \tag{4.35}$$

Solución.
Usando el Teorema 4.6.1,

$$\begin{aligned}
\sqrt{6+x-x^2} = x-3 &\iff 6+x-x^2 \geq 0 \wedge (x-3 \geq 0 \wedge 6+x-x^2 = (x-3)^2) \\
&\iff x^2-x-6 \leq 0 \wedge x \geq 3 \wedge 6+x-x^2 = x^2-6x+9 \\
&\iff (x+2)(x-3) \leq 0 \wedge x \geq 3 \wedge 2x^2-7x+3 = 0 \\
&\iff x \in [-2,3] \wedge x \in [3,+\infty\rangle \wedge (2x-1)(x-3) = 0 \\
&\iff x \in ([-2,3] \cap [3,+\infty\rangle) \wedge (x = \frac{1}{2} \vee x = 3) \\
&\iff x \in \{3\} \wedge x \in \{\frac{1}{2}, 3\} \\
&\iff x \in \{3\} \cap \{\frac{1}{2}, 3\} = \{3\}
\end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\text{CS} = \{3\}$$

Ejemplo 4.6.2

Resolver:

$$\sqrt{x+6} + \sqrt{x} = \sqrt{12x+3} \tag{4.36}$$

Solución.
Encontremos el conjunto universal:

$$\begin{aligned}
x+6 \geq 0 &\Longrightarrow x \geq -6 \Longrightarrow U_1 = [-6,+\infty\rangle \\
x \geq 0 &\Longrightarrow U_2 = [0,+\infty\rangle \\
12x+3 \geq 0 &\Longrightarrow x \geq -\frac{1}{4} \Longrightarrow U_3 = [-\frac{1}{4},+\infty\rangle
\end{aligned}$$

De donde,

$$U = U_1 \cap U_2 \cap U_3 = [-6,+\infty\rangle \cap [0,+\infty\rangle \cap [-\frac{1}{4},+\infty\rangle = [0,+\infty\rangle$$

$$
\begin{aligned}
(\sqrt{x+6}+\sqrt{x})^2 &= (\sqrt{12x+3})^2\\
x+6+2\sqrt{x+6}\sqrt{x}+x &= 12x+3\\
\sqrt{x+6}\sqrt{x} &= \frac{10x-3}{2}\\
\sqrt{(x+6)x} &= \frac{10x-3}{2}\geq 0
\end{aligned}
$$

Luego,

$$\frac{10x-3}{2}\geq 0 \Longrightarrow x\geq \frac{3}{10} \Longrightarrow x\in [\frac{3}{10},+\infty\rangle$$

Elevando al cuadrado:

$$
\begin{aligned}
(\sqrt{(x+6)x})^2 &= (\frac{10x-3}{2})^2\\
(x+6)x &= \frac{1}{4}(100x^2-60x+9)\\
4(x^2+6x) &= 100x^2-60x+9\\
4x^2+24x &= 100x^2-60x+9\\
0 &= 96x^2-84x+9\\
0 &= (24x-3)(4x-3) \Longrightarrow x=\frac{1}{8}\vee x=\frac{3}{4}
\end{aligned}
$$

Como $\frac{1}{8}\notin [\frac{3}{10},+\infty\rangle$ *entonces*

$$\text{CS} = \{\frac{3}{4}\}$$

Ejemplo 4.6.3

Resolver:

$$\sqrt{5x-17}+2\sqrt{3x-9}=\sqrt{x+23} \tag{4.37}$$

Solución.

$$
\begin{aligned}
5x-17\geq 0 &\Longrightarrow x\geq \frac{17}{5}\\
3x-9\geq 0 &\Longrightarrow x\geq 3\\
x+23\geq 0 &\Longrightarrow x\geq -23
\end{aligned}
$$

Luego,

$$U=[\frac{17}{5},+\infty\rangle\cap[3,+\infty\rangle\cap[-23,+\infty\rangle=[\frac{17}{5},+\infty\rangle$$

Elevando al cuadrado ambos lado tenemos

$$
\begin{aligned}
(\sqrt{5x-17}+2\sqrt{3x-9})^2 &= (\sqrt{x+23})^2\\
5x-17+4\sqrt{5x-17}\sqrt{3x-9}+4(3x-9) &= x+23\\
4\sqrt{(5x-17)(3x-9)} &= -16x+76\\
\sqrt{(5x-17)(3x-9)} &= -4x+19
\end{aligned}
$$

Como $-4x+19 \geq 0$ *resulta que* $x \leq \dfrac{19}{4} = 4.75$. *Por otro lado,*

$$\begin{aligned}
(5x-17)(3x-9) &= (-4x+19)^2 \\
15x^2-45x-51x+153 &= 16x^2-152x+261 \\
-x^2+56x-208 &= 0 \\
x^2-56x+208 &= 0 \\
(x-52)(x-4) &= 0 \Longrightarrow x = 52 \vee x = 4
\end{aligned}$$

Siendo $52 > 4.75$, *concluimos que* $\mathrm{CS} = \{4\}$.

4.7. Inecuaciones con radicales

Inecuaciones:

Las inecuaciones radicales tiene la forma:

$$W_1(x) : \sqrt{Q(x)} \geq P(x), \tag{4.38}$$

$$W_2(x) : \sqrt{Q(x)} \leq P(x), \tag{4.39}$$

$$W_3(x) : \sqrt{Q(x)} < P(x), \tag{4.40}$$

$$W_4(x) : \sqrt{Q(x)} > P(x), \tag{4.41}$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$, son polinomios con coeficientes reales o otras expresiones.

Teorema 4.7.1

$$\sqrt{Q(x)} \geq P(x) \Longleftrightarrow Q(x) \geq 0 \wedge [P(x) < 0 \vee (P(x) \geq 0 \wedge Q(x) \geq P(x)^2)] \tag{4.42}$$

$$\sqrt{Q(x)} > P(x) \Longleftrightarrow Q(x) \geq 0 \wedge [P(x) < 0 \vee (P(x) \geq 0 \wedge Q(x) > P(x)^2)] \tag{4.43}$$

$$\sqrt{Q(x)} < P(x) \Longleftrightarrow Q(x) \geq 0 \wedge [P(x) > 0 \wedge Q(x) < P(x)^2] \tag{4.44}$$

$$\sqrt{Q(x)} \leq P(x) \Longleftrightarrow Q(x) \geq 0 \wedge [P(x) \geq 0 \wedge Q(x) \leq P(x)^2] \tag{4.45}$$

Demostración. *Queda como ejercicio.*

Ejemplo 4.7.1

Resolver:

$$\sqrt{x^2-2x-99} > x-1 \tag{4.46}$$

Solución.

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2-2x-99} > x-1 \Longleftrightarrow & x^2-2x-99 \geq 0 \wedge [x-1<0 \vee (x-1\geq 0 \\ & \wedge x^2-2x-99 > (x-1)^2] \\ \Longleftrightarrow & (x+9)(x-11) \geq 0 \wedge [x<1 \vee (x \geq 1 \wedge -99 > 1)] \\ \Longleftrightarrow & x \in (\langle -\infty, -9] \cup [11, +\infty\rangle) \cap \langle -\infty, 1\rangle \\ \Longleftrightarrow & x \in \langle -\infty, -9]\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\text{CS} = \langle -\infty, -9]$$

Ejemplo 4.7.2

Resolver:

$$\sqrt{x^2-5x+4} \leq 2x-11 \tag{4.47}$$

Solución.

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2-5x+4} \leq 2x-11 \Longleftrightarrow & x^2-5x+4 \geq 0 \wedge [2x-11 \geq 0 \wedge x^2-5x+4 \leq (2x-11)^2] \\ \Longleftrightarrow & (x-1)(x-4) \geq 0 \wedge x \geq \frac{11}{2} \wedge 0 \leq 3x^2-39x+117 \\ \Longleftrightarrow & (x-1)(x-4) \geq 0 \wedge x \geq \frac{11}{2} \wedge 3\left[(x-\frac{13}{2})^2-\frac{13}{4}\right] \geq 0 \\ \Longleftrightarrow & x \in (\langle -\infty, 1] \cup [4, +\infty\rangle) \cap \left[\frac{11}{2}, +\infty\right\rangle \\ & \wedge (x-\frac{13+\sqrt{13}}{2})(x-\frac{13-\sqrt{13}}{2}) \geq 0 \\ \Longleftrightarrow & x \in [\frac{11}{2}, +\infty\rangle \wedge x \in \langle -\infty, \frac{13-\sqrt{13}}{2}] \cup [\frac{13+\sqrt{13}}{2}, +\infty\rangle \\ \Longleftrightarrow & x \in [\frac{13+\sqrt{13}}{2}, +\infty\rangle\end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\text{CS} = [\frac{13+\sqrt{13}}{2}, +\infty\rangle$$

4.8. Valor absoluto e inecuaciones

Definición 4.8.1

$|x|$, *denota valor absoluto de un número real* x, *es definida por*

$$\boxed{|x| = \text{máx}\{x, -x\}} \tag{4.48}$$

Teorema 4.8.1

$$|x| = \begin{cases} x & si\ x \geq 0, \\ -x & si\ x < 0. \end{cases} \tag{4.49}$$

Demostración.

$$\begin{aligned} x \geq 0 &\Longrightarrow x \geq 0 = -0 \geq -x \Longrightarrow |x| = \text{máx}\{x, -x\} = x \\ x < 0 &\Longrightarrow -x > 0 > x \Longrightarrow |x| = \text{máx}\{x, -x\} = -x \end{aligned}$$

Teorema 4.8.2

Para todo $x \in \mathbb{R}$,

1. $|x| \geq 0$;
2. $|x| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.

Demostración.
Usando Teorema 4.8.1,

$$\begin{aligned} x \geq 0 &\Longrightarrow |x| = x \geq 0 \\ x < 0 &\Longrightarrow |x| = -x > 0 \Longrightarrow |x| \geq 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, para todo $x \in \mathbb{R}$, vale $|x| \geq 0$.
($\Longrightarrow$) Supongamos que $|x| = 0$, y como $|x| = \text{máx}\{x, -x\}$ entonces $0 = \text{máx}\{x, -x\}$. De ahí, $0 \geq x$ y $-x \leq 0$. De esto $x = 0$.
($\Longleftarrow$) Si $x = 0$ entonces $|x| = \text{máx}\{0, -0\} = 0$.

Teorema 4.8.3

Para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$|x|^2 = x^2. \tag{4.50}$$

Demostración.
Aplicando el Teorema 4.8.1,

$$\begin{aligned} x \geq 0 &\Longrightarrow |x| = x \Longrightarrow |x|^2 = xx = x^2 \\ x < 0 &\Longrightarrow |x| = -x \Longrightarrow |x|^2 = (-x)(-x) = x^2 \end{aligned}$$

Teorema 4.8.4

Para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$\sqrt{x^2} = |x| \tag{4.51}$$

Demostración.
Aplicando el Teorema 4.8.3,

$$x^2 = |x|^2 \Longrightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{|x|^2} = |x|$$

Teorema 4.8.5

Para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$|-x| = |x| \tag{4.52}$$

Demostración.

$$|-x| = \text{máx}\{-x, -(-x)\} = \text{máx}\{-x, x\} = |x|$$

Teorema 4.8.6

1. *Para todos $x, y \in \mathbb{R}$,*

$$|xy| = |x||y| \tag{4.53}$$

2. *Para todos $x \in \mathbb{R}$ y $y \in \mathbb{R} - \{0\}$,*

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|} \tag{4.54}$$

Demostración.

1. *Aplicando el Teorema 4.8.3,*

$$(|xy|)^2 = (xy)^2 = x^2y^2 = |x|^2|y|^2 = (|x||y|)^2$$

Por lo tanto, $|xy| = |x||y|$.

2. *Usando el Teorema 4.8.4 y 4.8.3,*

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2} = \sqrt{\frac{x^2}{y^2}} = \sqrt{\frac{|x|^2}{|y|^2}} = \frac{|x|}{|y|}$$

Teorema 4.8.7

Para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$-|x| \leq x \leq |x| \tag{4.55}$$

Demostración.

$$|x| = \text{máx}\{x, -x\} \Longrightarrow -x \leq |x| \wedge x \leq |x| \Longrightarrow -|x| \leq x \leq |x|$$

Teorema 4.8.8

$$|x| = y \Longleftrightarrow [y \geq 0 \wedge (x = y \vee x = -y)] \tag{4.56}$$

Demostración.
Aplicando el Teorema 4.8.2, parte 1:

$$\begin{aligned} |x| \geq 0 &\Longrightarrow y \geq 0 \\ y = |x| &\Longrightarrow x = y \vee -x = y \\ &\Longrightarrow x = y \vee x = -y \end{aligned}$$

$$\therefore |x| = y \Longrightarrow [y \geq 0 \wedge (x = y \vee x = -y)]$$

Recíprocamente,

$$\begin{aligned}[y \geq 0 \wedge (x = y \vee x = -y)] &\Longrightarrow (y \geq 0 \wedge x = y) \vee (y \geq 0 \wedge x = -y) \\ &\Longrightarrow |x| = y \vee |x| = -x = y \\ &\Longrightarrow |x| = y\end{aligned}$$

Ejemplo 4.8.1

Resolver:

$$|3x - 9| = 2x - 4 \tag{4.57}$$

Solución.
Usando el Teorema 4.8.8,

$$\begin{aligned}|3x - 9| = 2x - 4 &\Longleftrightarrow 2x - 4 \geq 0 \wedge [3x - 9 = 2x - 4 \vee 3x - 9 = -(2x - 4)] \\ &\Longleftrightarrow 2x \geq 4 \wedge (3x - 2x = -4 + 9 \vee 3x - 9 = -2x + 4) \\ &\Longleftrightarrow x \geq 2 \wedge (x = 5 \vee 5x = 13) \\ &\Longleftrightarrow x \in [2, +\infty\rangle \wedge (x = 5 \vee x = \frac{13}{5}) \\ &\Longleftrightarrow x \in [2, +\infty\rangle \wedge x \in \{5, \frac{13}{5}\} \\ &\Longleftrightarrow x \in [2, +\infty\rangle \cap \{5, \frac{13}{5}\} \\ &\Longleftrightarrow x \in \{5, \frac{13}{5}\}\end{aligned} \tag{4.58}$$

Por lo tanto,

$$\text{CS} = \{5, \frac{13}{5}\}$$

Teorema 4.8.9

$$|x| = |y| \Longleftrightarrow x = y \vee x = -y \tag{4.59}$$

Demostración.

$$\begin{aligned}|x| = |y| &\Longleftrightarrow |x|^2 = |y|^2 \\ &\Longleftrightarrow x^2 = y^2 \\ &\Longleftrightarrow (x - y)(x + y) = 0 \\ &\Longleftrightarrow x - y = 0 \vee x + y = 0 \\ &\Longleftrightarrow x = y \vee x = -y\end{aligned}$$

Ejemplo 4.8.2

Resolver:

$$|2x - 1| = |x - 3| \tag{4.60}$$

Solución.

$$\begin{aligned}
|2x-1| = |x-3| &\iff 2x-1 = x-3 \vee 2x-1 = -(x-3)\\
&\iff 2x-x = -3+1 \vee 2x-1 = -x+3\\
&\iff x = -2 \vee 3x = 4\\
&\iff x = -2 \vee x = \frac{4}{3}\\
&\iff x \in \{-2, \frac{4}{3}\}
\end{aligned}$$

Consecuentemente,

$$\mathrm{CS} = \{-2, \frac{4}{3}\}$$

Ejemplo 4.8.3

Resolver:

$$||x^2-4|-x| = x+1 \tag{4.61}$$

Solución.

$$\begin{aligned}
||x^2-4|-x| = x+1 &\iff x+1 \geq 0 \wedge \Big(|x^2-4|-x = x+1 \vee |x^2-4|-x = -x-1\Big)\\
&\iff x \geq -1 \wedge \Big(|x^2-4| = 2x+1 \vee |x^2-4| = -1\Big)\\
&\iff x \geq -1 \wedge \underbrace{|x^2-4| = 2x+1}_{I}
\end{aligned}$$

Encontremos conjunto solución de I:

$$\begin{aligned}
|x^2-4| = 2x+1 &\iff 2x+1 \geq 0 \wedge (x^2-4 = 2x+1 \vee x^2-4 = -2x-1)\\
&\iff x \geq -\frac{1}{2} \wedge (x^2-2x-5 = 0 \vee x^2+2x-3 = 0)\\
&\iff x \geq -\frac{1}{2} \wedge [(x-1)^2 - (\sqrt{6})^2 = 0 \vee (x+1)^2 - 2^2 = 0]\\
&\iff x \geq -\frac{1}{2} \wedge [(x-1-\sqrt{6})(x-1+\sqrt{6}) = 0 \vee (x-1)(x+3) = 0]\\
&\iff x \in [-\frac{1}{2}, +\infty\rangle \wedge x \in \{1+\sqrt{6}, 1-\sqrt{6}, 1, -3\}\\
&\iff x \in [-\frac{1}{2}, +\infty\rangle \cap \{1+\sqrt{6}, 1-\sqrt{6}, 1, -3\} = \{1+\sqrt{6}, 1\}\\
&\iff x \in \{1+\sqrt{6}, 1\}
\end{aligned}$$

Consecuentemente,

$$||x^2-4|-x| = x+1 \iff x \in [-1, +\infty\rangle \cap \{1+\sqrt{6}, 1\} = \{1+\sqrt{6}, 1\}$$

Por lo tanto,

$$\mathrm{CS} = \{1+\sqrt{6}, 1\}$$

Teorema 4.8.10

1.
$$|x| \leq y \wedge y \geq 0 \iff -y \leq x \leq y \tag{4.62}$$

2.
$$|x| < y \wedge y > 0 \iff -y < x < y \tag{4.63}$$

Demostración.

1. ($\Longrightarrow$) *Por hipótesis* $|x| \leq y$ *y como* $x \leq |x|$ *entonces por transitiva* $x \leq y$. *Por otro lado,* $-x \leq |-x| = |x| \leq y$ *implica que* $-y \leq x$. *Consecuentemente,* $-y \leq x \leq y$.
   ($\Longleftarrow$) *Recíprocamente, si* $-y \leq x \leq y$ *entonces* $-y \leq y$, *o sea,* $y \geq 0$. *Además, la expresión* $-y \leq x \leq x$ *equivale a* $-y \leq x$ *y* $x \leq y$. *Si* $x \geq 0$ *entonces* $|x| = x$, *de esto,* $|x| = x \leq y$; *en otro caso,* $x < 0$ *tenemos* $|x| = -x \leq y$. *Estos casos prueban el recíproco.*
2. *Se demuestra de forma similar a 1.*

Ejemplo 4.8.4

Resolver:
$$\left|\frac{x-2}{x+1}\right| < 3 \tag{4.64}$$

Solución.
Aplicando el Teorema 4.8.10,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{x-2}{x+1}\right| < 3 &\iff -3 < \frac{x-2}{x+1} < 3 \\
&\iff -3 < \frac{x-2}{x+1} \wedge \frac{x-2}{x+1} < 3 \\
&\iff \frac{x-2}{x+1} + 3 > 0 \wedge \frac{x-2}{x+1} - 3 < 0 \\
&\iff \frac{x-2+3(x+1)}{x+1} > 0 \wedge \frac{x-2-3(x+1)}{x+1} < 0 \\
&\iff \frac{4x+1}{x+1} > 0 \wedge \frac{2x+5}{x+1} > 0 \\
&\iff x \in \langle -\infty, -1\rangle \cup \langle -\frac{1}{4}, +\infty\rangle \wedge x \in \langle -\infty, -\frac{5}{2}\rangle \cup \langle -1, +\infty\rangle \\
&\iff x \in \langle -\infty, -\frac{5}{2}\rangle \cup \langle -\frac{1}{4}, +\infty\rangle
\end{aligned}$$

Por lo tanto,
$$\mathrm{CS} = \langle -\infty, -\frac{5}{2}\rangle \cup \langle -\frac{1}{4}, +\infty\rangle$$

Teorema 4.8.11

1.
$$|x| \geq y \Longleftrightarrow x \geq y \vee x \leq -y \tag{4.65}$$

2.
$$|x| > y \Longleftrightarrow x > y \vee x < -y \tag{4.66}$$

Demostración.

1.
$$\begin{aligned} |x| \geq y &\Longrightarrow x \geq y \vee -x \geq y \\ &\Longrightarrow x \geq y \vee x \leq -y \end{aligned}$$

Supongamos que $x \geq y$, *resulta que* $|x| \geq x \geq y$, *esto es,* $|x| \geq y$; *si* $x \leq -y$ *entonces* $-x \geq y$, *de ahí,* $|x| \geq -x \geq y$, *esto es,* $|x| \geq y$.

2. *De forma similar al primer resultado se demuestra.*

Teorema 4.8.12

Para todo $x, y \in \mathbb{R}$,
$$|x| \leq |y| \Longleftrightarrow x^2 \leq y^2 \tag{4.67}$$

Demostración.
($\Longrightarrow$)

$$\begin{aligned} |x| \leq |y| &\Longrightarrow |x|^2 \leq |x||y| \wedge |y||x| \leq |y|^2 \\ &\Longrightarrow x^2 = |x|^2 \leq |y|^2 = y^2 \\ &\Longrightarrow x^2 \leq y^2 \end{aligned}$$

($\Longleftarrow$)

$$\begin{aligned} x^2 \leq y^2 &\Longrightarrow |x|^2 - |y|^2 \leq 0 \\ &\Longrightarrow (|x| + |y|)(|x| - |y|) \leq 0 \\ &\Longrightarrow |x| - |y| \leq 0 \\ &\Longrightarrow |x| \leq |y| \end{aligned}$$

Ejemplo 4.8.5

Resolver:
$$|x - 7| \leq |x - 2| \tag{4.68}$$

Solución.

$$\begin{aligned}
|x-7| \leq |x-2| &\Longleftrightarrow (x-7)^2 \leq (x-2)^2\\
&\Longleftrightarrow x^2 - 14x + 49 \leq x^2 - 4x + 4\\
&\Longleftrightarrow -14x + 4x \leq 4 - 49\\
&\Longleftrightarrow -10x \leq -45\\
&\Longleftrightarrow x \geq \frac{45}{10} = \frac{9}{2}
\end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\text{CS} = [\frac{9}{2}, +\infty\rangle$$

Ejemplo 4.8.6

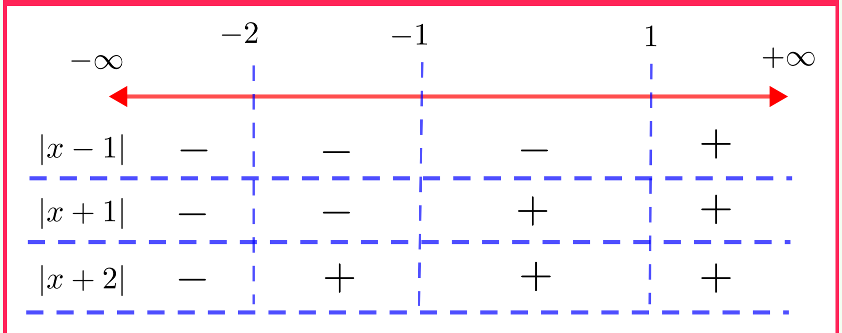
Resolver:

$$\frac{|x-1| + |x+1| - 3|x+2|}{|x+1| + |x+2|} \leq 2 \tag{4.69}$$

Solución.
Encontremos los puntos críticos:

$$\begin{aligned}
x - 1 = 0 &\Longrightarrow x = 1\\
x + 1 = 0 &\Longrightarrow x = -1\\
x + 2 = 0 &\Longrightarrow x = -2
\end{aligned}$$

Figura 4.4: Signos



1. *En* $\mathbb{U}_1 = \langle -\infty, -2\rangle$:

$$\begin{aligned}
\frac{-(x-1) - (x+1) + 3(x+2)}{-(x+1) - (x+2)} \leq 2 &\Longleftrightarrow \frac{-x + 1 - x - 1 + 3x + 6}{-x - 1 - x - 2} \leq 2\\
&\Longleftrightarrow \frac{x+6}{-2x-3} - 2 \leq 0\\
&\Longleftrightarrow \frac{x + 6 + 2(2x+3)}{-(2x+3)} \leq 0\\
&\Longleftrightarrow \frac{5x+12}{2x+3} \geq 0\\
&\Longleftrightarrow x \in \langle -\infty, -\frac{12}{5}] \cup \langle -\frac{3}{2}, +\infty\rangle
\end{aligned}$$

$$\text{CS}_1 = \langle -\infty, -2\rangle \cap \left(\langle -\infty, -\frac{12}{5}] \cup \langle -\frac{3}{2}, +\infty\rangle\right) = \langle -\infty, -\frac{12}{5}]$$

2. *En* $\mathbb{U}_2 = [-2, -1\rangle$:

$$\begin{aligned}
\frac{-(x-1)-(x+1)-3(x+2)}{-(x+1)+x+2} \leq 2 &\iff \frac{-x+1-x-1-3x-6}{1} \leq 2\\
&\iff -5x-6 \leq 2\\
&\iff 5x+6 \geq -2\\
&\iff 5x \geq -8\\
&\iff x \geq -\frac{8}{5}
\end{aligned}$$

$$\mathrm{CS}_2 = [-2, -1\rangle \cap [-\frac{8}{5}, +\infty\rangle = [-\frac{8}{5}, -1\rangle$$

3. *En* $\mathbb{U}_3 = [-1, 1\rangle$:

$$\begin{aligned}
\frac{-(x-1)+x+1-3(x+2)}{x+1+x+2} \leq 2 &\iff \frac{-x+1+x+1-3x-6}{2x+3} \leq 2\\
&\iff \frac{-3x-4}{2x+3} - 2 \leq 0\\
&\iff \frac{-3x-4-2(2x+3)}{2x+3} \leq 0\\
&\iff \frac{-7x-10}{2x+3} \leq 0\\
&\iff \frac{7x+10}{2x+3} \geq 0\\
&\iff x \in \langle\infty, -\frac{3}{2}\rangle \cup [-\frac{10}{7}, +\infty\rangle
\end{aligned}$$

$$\mathrm{CS}_3 = [-1, 1\rangle \cap \Big(\langle-\infty, -\frac{3}{2}\rangle \cup [-\frac{10}{7}, +\infty\rangle\Big) = [-1, 1\rangle$$

4. *En* $\mathbb{U}_4 = [1, +\infty\rangle$:

$$\begin{aligned}
\frac{x-1+x+1-3(x+2)}{x+1+x+2} \leq 2 &\iff \frac{-x-6}{2x+3} - 2 \leq 0\\
&\iff \frac{-x-6-4x-6}{2x+3} \leq 0\\
&\iff \frac{-5x-12}{2x+3} \leq 0\\
&\iff \frac{5x+12}{2x+3} \geq 0\\
&\iff x \in \langle-\infty, -\frac{12}{5}] \cup \langle-\frac{3}{2}, +\infty\rangle
\end{aligned}$$

$$\mathrm{CS}_4 = [1, +\infty\rangle \cap \Big(\langle-\infty, -\frac{12}{5}] \cup \langle-\frac{3}{2}, +\infty\rangle\Big) = [1, +\infty\rangle$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\mathrm{CS} &= \langle-\infty, -\frac{12}{5}] \cup [-\frac{8}{5}, -1\rangle \cup [-1, 1\rangle \cup [1, +\infty\rangle\\
&= \langle-\infty, -\frac{12}{5}] \cup [-\frac{8}{5}, +\infty\rangle
\end{aligned}$$

4.9. Máximo entero e inecuaciones

Definición 4.9.1

El máximo entero de un número real x, es denotado por $[\![x]\!]$ y definido por

$$\boxed{[\![x]\!] := \text{máx}\{m \in \mathbb{Z} : m \leq x\}} \tag{4.70}$$

El valor $[\![x]\!]$, es el máximo elemento del conjunto $\{m \in \mathbb{Z} : m \leq x\}$, o sea, el entero más cercano por la izquierda de x. Entonces $[\![x]\!] \in \{m \in \mathbb{Z} : m \leq x\}$ y

$$[\![x]\!] \leq x \tag{4.71}$$

Ejemplo 4.9.1

Determinar $[\![4.7]\!]$, $[\![3.8]\!]$, $[\![-3.7]\!]$ y $[\![-8.5]\!]$.

Solución.

$$\begin{aligned}
[\![4.7]\!] &= \text{máx}\{m \in \mathbb{Z} : m \leq 4.7\} = 4 \\
[\![3.8]\!] &= \text{máx}\{m \in \mathbb{Z} : m \leq 3.8\} = 3 \\
[\![-3.7]\!] &= \text{máx}\{m \in \mathbb{Z} : m \leq -3.7\} = -4 \\
[\![-8.5]\!] &= \text{máx}\{m \in \mathbb{Z} : m \leq -8.5\} = -9
\end{aligned}$$

Teorema 4.9.1

1. $[\![x]\!] \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}$
2. $x \in \mathbb{Z} \Longleftrightarrow [\![x]\!] = x$
3. $[\![x]\!] = n \Longleftrightarrow n \in \mathbb{Z} \wedge n \leq x < n + 1$

Demostración.

1. *Por definición $[\![x]\!] \in \{m \in \mathbb{Z} : m \leq x\} \subset \mathbb{Z}$, de ahí $[\![x]\!] \in \mathbb{Z}$.*
2. *($\Longrightarrow$) Si $x \in \mathbb{Z}$, entonces $x \leq x$. De esto, $x \in \{m \in \mathbb{Z} : m \leq x\}$ implica que $[\![x]\!] = x$.*
   ($\Longleftarrow$) Como $[\![x]\!] = x$ por definición de máximo se tiene $x = [\![x]\!] \in \mathbb{Z}$.
3. *($\Longrightarrow$) Sea $[\![x]\!] = n$. Entonces $n \in \mathbb{Z}$, ya que vale el item 1. Por otro lado, usando (4.71) se obtiene $n = [\![x]\!] \leq x$. Falta probar que $x < n + 1$, si fuese $x \geq n + 1$ entonces $[\![x]\!] \neq n$. De donde, $n \leq x < n + 1$.*
   ($\Longleftarrow$) Supongamos que $[\![x]\!] \neq n$. Sea $m = [\![x]\!]$, resulta que $n+1 \leq m$, esto es, $x < n + 1 \leq m = [\![x]\!] \leq x$, aquí se uso la hipótesis. Aplicando la transitiva a la desigualdad anterior se obtiene, $x < x$, esto es una contradicción. Esto demuestra, $[\![x]\!] = n$.

Ejemplo 4.9.2

Resolver:

$$[\![2x-8]\!]=8 \tag{4.72}$$

Solución.

$$\begin{aligned}[\![2x-8]\!]=8 &\Longleftrightarrow 8\leq 2x-8<9\\ &\Longleftrightarrow 16\leq 2x<17\\ &\Longleftrightarrow 8\leq x<\frac{17}{2}\\ &\Longleftrightarrow x\in[8,\frac{17}{2}\rangle\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\text{CS}=[8,\frac{17}{2}\rangle$$

Ejemplo 4.9.3

Resolver:

$$[\![|x-2|-2x]\!]=1 \tag{4.73}$$

Demostración.

$$\begin{aligned}[\![|x-2|-2x]\!]=1 &\Longleftrightarrow 1\leq |x-2|-2x<2\\ &\Longleftrightarrow 1\leq |x-2|-2x \wedge |x-2|-2x<2\\ &\Longleftrightarrow \underbrace{|x-2|\geq 1+2x}_{I}\wedge\underbrace{|x-2|<2+2x}_{II}\end{aligned}$$

En I:

$$\begin{aligned}|x-2|\geq 1+2x &\Longleftrightarrow x-2\geq 1+2x \vee x-2\leq -1-2x\\ &\Longleftrightarrow x\leq -3 \vee x\leq \frac{1}{3}\\ &\Longleftrightarrow x\in\langle-\infty,-3]\cup\langle-\infty,\frac{1}{3}]=\langle-\infty,\frac{1}{3}]\\ &\Longleftrightarrow x\in\langle-\infty,\frac{1}{3}]\end{aligned}$$

En II:

$$\begin{aligned}|x-2|<2+2x &\Longleftrightarrow 2+2x\geq 0\wedge -2-2x<x-2<2+2x\\ &\Longleftrightarrow x\geq -1\wedge -2-2x<x-2\wedge x-2<2+2x\\ &\Longleftrightarrow x\geq -1\wedge x>0\wedge x>-4\\ &\Longleftrightarrow x\in[-1,+\infty\rangle\cap\langle 0,+\infty\rangle\cap\langle -4,+\infty\rangle=\langle 0,+\infty\rangle\\ &\Longleftrightarrow x\in\langle 0,+\infty\rangle\end{aligned}$$

De donde,

$$[\![|x-2|-2x]\!]=1 \Longleftrightarrow x\in\langle-\infty,\frac{1}{3}]\cap\langle 0,+\infty\rangle=\langle 0,\frac{1}{3}]$$

Por consiguiente,

$$\text{CS}=\langle 0,\frac{1}{3}]$$

Teorema 4.9.2

Para todo $n \in \mathbb{Z}$*,*

1. $[\![x]\!] < n \Longleftrightarrow x < n$
2. $[\![x]\!] \leq n \Longleftrightarrow x < n + 1$
3. $[\![x]\!] > n \Longleftrightarrow x \geq n + 1$
4. $[\![x]\!] \geq n \Longleftrightarrow x \geq n$

Demostración.

1. *(*$\Longrightarrow$*)Sea* $[\![x]\!] = m$*. Aplicando el Teorema 4.9.1: 3, se tiene*

$$m \in \mathbb{Z} \wedge m \leq x < m + 1 \tag{4.74}$$

Como $m < n$*, resulta que* $m \leq n - 1$ *y usando la desigualdad (4.74), se obtiene* $x < m + 1 \leq n - 1 + 1 = n$*. Esto es,* $x < n$*.*
($\Longleftarrow$*) Supongamos que* $[\![x]\!] \geq n$*. Tomando en cuenta la hipótesis* $x < n$*, se obtiene* $[\![x]\!] \geq n > x$*. Sin embargo,* $x \geq [\![x]\!]$ *implica* $[\![x]\!] \geq n > x \geq [\![x]\!]$*, o sea,* $[\![x]\!] > [\![x]\!]$*, esto es una contradicción. Por consiguiente,* $[\![x]\!] < n$*.*

2. *(*$\Longrightarrow$*) Supongamos que* $x \geq n+1$*, y por hipótesis* $[\![x]\!] \leq n$ *entonces* $n+1 \geq [\![x]\!]+1$*, de ahí,* $n+1 \geq [\![x]\!]+1 > x \geq n+1$ *de esto se obtiene* $n+1 > n+1$*, una contradicción. Por lo tanto,* $x < n + 1$*.*
($\Longleftarrow$*) Como* $x < n + 1$ *y* $[\![x]\!] \leq x$*, entonces* $[\![x]\!] < n + 1$*, o sea,* $[\![x]\!] - 1 < n$*. De donde,* $[\![x]\!] \leq n$*.*

3. *(*$\Longrightarrow$*) Como* $[\![x]\!] > n$ *entonces* $[\![x]\!] \geq n + 1$*. Además, se sabe que* $x \geq [\![x]\!]$ *de modo que* $x \geq [\![x]\!] \geq n + 1$*, es todo muestra* $x \geq n + 1$*.*
($\Longleftarrow$*) Supongamos que* $[\![x]\!] \leq n$*. Entonces*

$$[\![x]\!] + 1 \leq n + 1 \tag{4.75}$$

Como $x < [\![x]\!] + 1$ *y usando la desigualdad (4.75), tenemos*

$$x < [\![x]\!] + 1 \leq n + 1 \tag{4.76}$$

Esto nos lleva obtener $x < n + 1$*. Esto es un absurdo.*

4. *(*$\Longrightarrow$*) Como* $[\![x]\!] \leq x$ *se obtiene*

$$x \geq [\![x]\!] \geq n \tag{4.77}$$

por transitiva, $x \geq n$*.*
($\Longleftarrow$*) Supongamos que* $[\![x]\!] < n$*, de esto,* $[\![x]\!] \leq n - 1$*. Usando* $x < [\![x]\!] + 1$ *obtenemos*

$$[\![x]\!] \leq x - 1 < [\![x]\!] + 1 - 1 = [\![x]\!], \tag{4.78}$$

esto es un absurdo.

Ejemplo 4.9.4

Resolver:

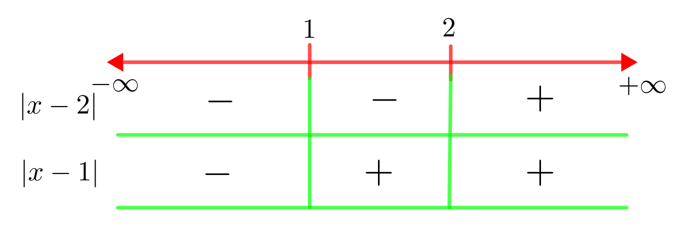
$$\left[\!\!\left[\frac{|x-2|+5}{|x-1|}\right]\!\!\right] > 3 \tag{4.79}$$

Solución.

Aplicando el Teorema 4.9.2:3,

$$\left[\!\!\left[\frac{|x-2|+5}{|x-1|}\right]\!\!\right] > 3 \iff \frac{|x-2|+5}{|x-1|} \geq 4 \tag{4.80}$$

Figura 4.5: Signos



1. *Para* $U_1 = \langle -\infty, 1\rangle$*:*

$$\begin{aligned}
\frac{|x-2|+5}{|x-1|} \geq 4 &\iff \frac{-x+2+5}{-x+1} \geq 4\\
&\iff \frac{-x+7-4(-x+1)}{-x+1} \geq 0\\
&\iff \frac{3x+3}{-x+1} \geq 0\\
&\iff \frac{x+1}{x-1} \leq 0\\
&\iff x \in [-1, 1\rangle
\end{aligned}$$

$$\mathrm{CS} = \langle -\infty, 1\rangle \cap [-1, 1\rangle = [-1, 1\rangle \tag{4.81}$$

2. *Para* $U_2 = [1, 2\rangle$*:*

$$\begin{aligned}
\frac{|x-2|+5}{|x-1|} \geq 4 &\iff \frac{-x+2+5}{x-1} - 4 \geq 0\\
&\iff \frac{-x+7-4(x-1)}{x-1} \geq 0\\
&\iff \frac{-5x+11}{x-1} \geq 0\\
&\iff \frac{5x-11}{x-1} \leq 0\\
&\iff x \in \langle 1, \frac{11}{5}]
\end{aligned}$$

$$\mathrm{CS}_2 = [1, 2\rangle \cap \langle 1, \frac{11}{5}] = \langle 1, 2\rangle \tag{4.82}$$

3. *Para* $U_3 = [2, +\infty\rangle$:

$$\begin{aligned}\frac{|x-2|+5}{|x-1|} \geq 4 &\iff \frac{x+3}{x-1} - 4 \geq 0\\ &\iff \frac{x+3-4x+4}{x-1} \geq 0\\ &\iff \frac{-3x+7}{x-1} \geq 0\\ &\iff \frac{3x-7}{x-1} \leq 0\\ &\iff x \in \langle 1, \frac{7}{3}]\end{aligned}$$

$$\mathrm{CS}_3 = [2, +\infty\rangle \cap \langle 1, \frac{7}{3}] = [2, \frac{7}{3}] \tag{4.83}$$

Por lo tanto,

$$\mathrm{CS} = [-1, 1\rangle \cup \langle 1, 2\rangle \cup [2, \frac{7}{3}] = [-1, 1\rangle \cup \langle 1, \frac{7}{3}] \tag{4.84}$$

Ejemplo 4.9.5

Resolver:

$$\left[\!\left[\frac{|x-3|-1}{x-7}\right]\!\right] < -2.5 \tag{4.85}$$

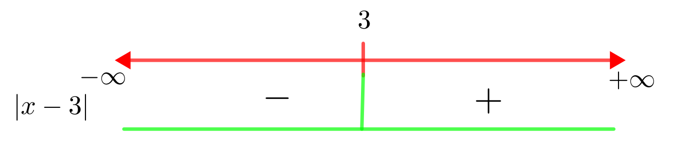
Solución.
Se tiene:

$$\left[\!\left[\frac{|x-3|-1}{x-7}\right]\!\right] < -2.5 \iff \left[\!\left[\frac{|x-3|-1}{x-7}\right]\!\right] \leq -3 \tag{4.86}$$

Aplicando el Teorema 4.9.2:2, tenemos

$$\left[\!\left[\frac{|x-3|-1}{x-7}\right]\!\right] \leq 3 \iff \frac{|x-3|-1}{x-7} < -2 \tag{4.87}$$

Figura 4.6: Signos



1. *En* $U_1 = \langle -\infty, 3\rangle$*:*

$$\begin{aligned}
\frac{|x-3|-1}{x-7} < -2 &\iff \frac{-(x-3)-1}{x-7} + 2 < 0 \\
&\iff \frac{-x+3-1+2x-14}{x-7} < 0 \\
&\iff \frac{x-12}{x-7} < 0 \\
&\iff x \in \langle 7, 12\rangle
\end{aligned} \tag{4.88}$$

$$\mathrm{CS}_1 = \langle -\infty, 3\rangle \cap \langle 7, 12\rangle = \emptyset \tag{4.89}$$

2. *En* $U_2 = [3, +\infty\rangle$*:*

$$\begin{aligned}
\frac{|x-3|-1}{x-7} < -2 &\iff \frac{x-3-1}{x-7} + 2 < 0 \\
&\iff \frac{x-4+2x-14}{x-7} < 0 \\
&\iff \frac{3x-18}{x-7} < 0 \\
&\iff x \in \langle 6, 7\rangle
\end{aligned}$$

$$\mathrm{CS}_2 = [3, +\infty\rangle \cap \langle 6, 7\rangle = \langle 6, 7\rangle \tag{4.90}$$

Por lo tanto,

$$\mathrm{CS} = \mathrm{CS}_1 \cup \mathrm{CS}_2 = \emptyset \cup \langle 6, 7\rangle = \langle 6, 7\rangle \tag{4.91}$$

4.10. Ejercicios propuestos

Tarea para casa:

✍**1.** Encontrar conjunto solución de las siguientes ecuaciones:

a) $2x - 7 + 3x - 8x + 32 = -39$

b) $-x + 3x - 32 + 89 - x + 3 - 3x = x + 120 - 20 - 3x$

c) $-7(x+4) - 8x + 3x = x + 8 + 3(x+4) - x$

d) $x - (3x - 8) + x - 2 + 4x = 12 + x - 36 + 160$

e) $2(x+2)(x-1) = x + 3$

f) $-5(x-1)(x+3) = (x+5)(x-2)$

g) $x^{-4} + 8x^{-2} - 33 = 0$

h) $x^{-6} + 7x^{-3} - 8 = 0$

i) $\dfrac{1}{(x-1)^2} - \dfrac{2}{x-1} - 63 = 0$

j) $\dfrac{x-1}{7x+7} = \dfrac{1}{4} - \dfrac{x+8}{28x+28}$

k) $\dfrac{x}{x+4} = \dfrac{2-x}{x^2+3x-4} + \dfrac{1}{x-1}$

l) $\dfrac{9}{x-3} - \dfrac{4}{x-6} = \dfrac{18}{x^2-9x+18}$

m) $\dfrac{1}{x^2+x-2} + \dfrac{1}{x^2+2x} = \dfrac{1}{x+2}$

n) $\dfrac{x+2}{x^2+4x-5} - \dfrac{x}{x+5} = \dfrac{1}{x-1}$

✍**2.** Resolver:

a) $\dfrac{x+a}{x-a} + \dfrac{x-b}{x+b} = 2$

b) $2(3ax-2) + a(x-2a+1) + x(a-x+2) = 3a(x-1) - x(x+a)$

c) $\dfrac{ax-b}{ax+b} - \dfrac{ax}{ax-b} = 1$

✍**3.** Para qué valores de λ, la ecuación

$$\lambda(x-1) + x(\lambda - 2) = x(1-\lambda),$$

tiene solución.

✍**4.** Los valores p y q satisfacen

$$3x^2 + 11x - 4 = (x+p)(qx-1).$$

Hallar $p+q$.

✍**5.** Considere la ecuación cuadrática $ax^2+bx+c=0$, con raíces a y b diferentes de cero. Hallar $a(a^3+b)-b^2(a+1)$.

✍**6.** El ángulo que gira un eje giratorio en t segundos viene dado por $\theta=\omega t+\frac{1}{2}\alpha t^2$. Determine el tiempo que se tarda en completar 8 radianes si ω es $6.0\, rad/s$ y α es $0.80\, rad/s^2$.

✍**7.** Se cumple:

$$\frac{(x+3)(x^2-4)^2(x^2-4x+4)}{(x+2)(x^2+x-6)}=ax^4+bx^3+cx+d,$$

para $x\neq -3,-2,2$. Hallar $a+b+c+d$.

✍**8.** Determina los valores de x y y que satisfacen simultáneamente las ecuaciones $2x^2=4+5x-y$ y $y=4-x$.

✍**9.** Sea la ecuación $ax^2+(b+1)x+c=0$, con raíces -2 y 3. Determine $a+b$.

✍**10.** Si $3x^2+(m+n)x-m+5=0$ tiene raíces recíprocas y $6x^2+(2h-1)x+8=0$ tiene diferentes raíces simétricas. Resuelve la ecuación $x^2+6hx-2m=0$.

✍**11.** Al resolver $x^2+4x+i+3=0$, determine las partes imaginarias de las soluciones.

✍**12.** La población de peces del lago Titicaca sube de acuerdo con la fórmula:

$$P(t)=5000(t^2+4t+21)$$

donde, P es el número de peces en el tiempo t y t mide en años desde el 1 de enero de 2020, cuando la población de peces se estimó por primera vez.

a) ¿En qué fecha la población de peces será doble de la misma de como era el 1 de enero de 2020?

b) ¿En qué fecha habrán 585000 peces en el lago Titicaca?

✍**13.** El consejo de estudiantes de una universidad fleta un avión para las vacaciones de primavera. El avión tiene capacidad para 150 pasajeros. La aerolínea cobrará 120 dólares por pasajero y añadirá un recargo de 15 dólares por pasajero por cada asiento no vendido. Sea x el número de asientos no vendidos.

a) Demuestre que los ingresos de la aerolínea está dada por

$$I=18000+2130x-15x^2$$

b) ¿Cuántos asientos deben quedar sin utilizar para maximizar los ingresos de la aerolínea?

c) ¿Qué precio pagaría cada pasajero si la aerolínea maximizara sus ingresos?

d) ¿Es un buen negocio para el concejo estudiantil?

✍**14.** Se sabe que $\alpha + \beta + \theta = 0$, encuentre una raíz de la ecuación:

$$\alpha(\alpha + 2\beta)x^2 + \beta(\beta + 2\theta)x + \theta(\theta + 2\alpha) = 0$$

✍**15.** Resolver:

$$\left(\sqrt{x^2-10x+13}+\sqrt{x^2-10x+9}\right)^{\frac{x}{2}} + \left(\sqrt{x^2-10x+13}-\sqrt{x^2-10x+9}\right)^{\frac{x}{2}} = 2^{\frac{x}{2}+1}$$

✍**16.** Resolver las siguientes inecuaciones:

a) $2x + 4(4 - x) + 78 > 180$

b) $4x - 2x + 8 < 20$

c) $-x + 7 + 6x \leq 42$

d) $x - 33 + 3x \geq -x + 12$

e) $5x - 74 - 8x \leq 2x - 6x - 8$

f) $2 + 3x \geq -3x - 100 + 6x$

g) $2(7x - 19) - 2(x - 1) + 7(5x - 3) \geq 6(x - 21) + 4(5x - 6)$

h) $5(2x - 9) + 2(6x - 1) < 12(x - 2) + 4(x - 5)$

✍**17.** Resolver cada una de las inecuaciones:

a) $x^2 - 4x + 12 > -x + 16$

b) $-5x^2 - 10x + 26 > 2x - 66$

c) $-x^2 - 2x - 24 < -3x - 56 + 6x + x^2$

d) $x^2 - 3x + 12 > 3 + x(x + 1) + 2x$

e) $-x^2 - 24 \geq -4x - 88 - 5x + 3x^2$

f) $(x - 1)x - x(1 - x) < 3$

g) $x(x - 4) + (x + 3)(x - 7) \geq 3$

h) $x^2 - 3x + 7(x - 2) < -2(x - 1)(x - 9) - 2$

i) $x^2 + 8x - 3\left(x + \frac{1}{2}\right) > 4(x - 2)(x + 1) + 1$

✍**18.** Resolver las siguientes inecuaciones:

a) $\dfrac{(x^2 + 1)^5(x - 1)(x + 2)}{(x + 3)(x - 5)} \geq 0$

b) $\dfrac{x^2(4x - 7)(2x + 9)^3}{(x - 2)^5(2x + 1)^6} > 0$

c) $\dfrac{(x - 1)(x + 2)^3(x - 3)(x - 2)}{(x + 7)^4(x + 3)(x + 5)^3} < 0$

d) $\dfrac{(x - 1)^3(x + 3)^6(2x + 12)^7}{(x + 1)^2(x + 7)^{133}(x^2)} \leq 0$

e) $\dfrac{(x-3)^{2000}(x+7)^{12}(x+2)^{13331}(x-6)}{(x-2)^{17}(x+9)^{89}} < 0$

f) $\dfrac{(6-x)^{2021}(x-3)^{120}(x+5)^{70}(x-6)}{(x+4)^{8}(x+9)^{3}} < 0$

g) $\dfrac{(x+12)^{2}(x+3)^{13}(x-2)^{6}(x+16)^{2001}(x-7)^{2020}}{(x-1)^{9}(x-7)^{9}(x+6)^{3}(x-17)^{2022}} \leq 0$

h) $\dfrac{(x+2)^{2}(5-x)^{13}(x-2)^{6}(x+6)^{20}(11-x)^{2021}}{(x-6)^{9}(x+9)^{9}(x-2)^{3}(x-27)^{22}} \geq 0$

✍**19.** Resolver las siguientes inecuaciones:

a) $\dfrac{x+1}{x-2} - \dfrac{x+3}{x+2} \leq 1$

b) $\dfrac{x-1}{2x+1} + \dfrac{-2x+7}{4x+2} \geq 2$

c) $\dfrac{2x^2+5x-3}{x^2-2x-8} > 0$

d) $\dfrac{x^3+2x^2-15x-36}{x^2+4x-21} < 0$

e) $\dfrac{12x^3-38x^2+20x}{25-9x^2} \leq 0$

f) $\dfrac{x^4+2x^3-16x^2-2x+15}{x^3+3x^2-10x-24} \leq 0$

g) $\dfrac{x^5+3x^4-5x^3-15x^2+4x+12}{x^3+5x^2-9x-45} \geq 0$

h) $\dfrac{x^6-14x^4+49x^2-36}{x^6-45x^4+564x^2-1600} \geq 0$

✍**20.** Sean e y f números reales positivos. Encontrar conjunto solución de

$$\frac{x-e}{x+f} \leq \frac{x-f}{x-e}$$

✍**21.** Determinara conjunto solución de cada una de las ecuaciones siguientes:

a) $\sqrt{x^2-x-6} = 9-x^2$

b) $\sqrt{x-6} = 2x-18$

c) $\sqrt{x+6} + \sqrt{x} = \sqrt{12+3x}$

d) $\sqrt{x-2} + \sqrt{3x-9} = \sqrt{x-6}$

e) $\sqrt{3x+22} + \sqrt{x+22} = \sqrt{x+95}$

f) $\sqrt{x^2-13x+40} = 0$

g) $\sqrt{x^2-x-2} = \sqrt{x^2-x-20}$

h) $\sqrt{7x+7} + \sqrt{45-x} = 2\sqrt{3x+31}$

✍**22.** Encontrar conjunto solución de inecuaciones con radicales:

a) $\sqrt{x^2+3x-88} > \sqrt{x^2+3x-10}$

b) $\sqrt{x-3}+\sqrt{2x-8} \leq \sqrt{3x-9}$

c) $\sqrt{x^2-3x-40} > x-5$

d) $\sqrt{x^2-4x-32} \leq x^2-2x-3$

e) $\sqrt{2x^2+\sqrt{x^2-4x}} > 0$

f) $\sqrt{x+\sqrt{x^3+\sqrt{x^2+9x}}} > 0$

✍**23.** Si $2a > b > a > 0$, hallar conjunto solución de

$$|x-a|+|2x-b| > a$$

✍**24.** Resolver cada una de las siguientes ecuaciones:

a) $|x^2-4| = x^2-4$

b) $|x^2-2x-16| = 8$

c) $|3x^2-12x-7| = 5$

d) $|x^2-x-4| = x-1$

e) $|4x^2-x-4| = 3x-1$

f) $|x-2| = x^2-x-56$

g) $|x^2+4x-21| = 3x-8$

h) $|2x-1|+3|x+1| = |x-2|$

i) $|x-1|-|x-7|+3|x+4| = |x-9|$

j) $|2x-18|-3|x-8|+|3x-9|+3|4x-8| = 0$

k) $\dfrac{2|x-1|+|3x-1|+|2x-4|}{|x-1|+|x-3|} = 4$

l) $\dfrac{|x-2|-|3x-21|+|7x-14||x|}{|x-2|+|x-8|} = 2$

m) $|x^2+5x-24|-|x^2+11x+28| = 12$

n) $[\![3x-11]\!] = 10$

ñ) $[\![2x-|x-1|]\!] = 5$

o) $[\![|x|-x|x-6|+2]\!] = -4$

p) $|x|x-1|-1| = 1-x$

q) $|x|x|-x^2| = |x-1|$

r) $||x-1|+|x+2|| = x+3$

✍**25.** Encontrar conjunto solución de cada una de las inecuaciones:

a) $\left|\dfrac{2x-6}{x+4}\right| < 4$

b) $\left|\dfrac{8-2x}{3x+9}\right| \leq 6$

c) $\left|\dfrac{x-24}{x-3}\right| \geq 12$

d) $\left|\dfrac{x-1}{x+2}\right| \leq \left|\dfrac{x+1}{x-2}\right|$

e) $\dfrac{|3x-1|+2x}{3x-|x+1|} \leq 0$

f) $\left|\dfrac{x^2+7x-2}{x^2-1}\right| > 1$

g) $\left|\dfrac{x^2-x+1}{x}\right| < 4$

h) $2|x-1|-|x-4| < 4$

i) $|x-2|+|x-9| < 24$

j) $\dfrac{\left|\dfrac{2x+1}{x}\right|-|x-2|}{-4x-4-x^2} < 0$

k) $\dfrac{\left|\dfrac{2x-5}{x}\right|-|2x-1|}{|4-x^2|} > 0$

l) $|2x-2|-|x+1|-|x-2| \geq |x+9|-|x-3|+|x+10|$

m) $|x-8|-|2x-2|+5|x+3| < 2|x-1|$

n) $|4x-1|-2|x+3|+|x-1| \geq |x+3|+|x+14|$

ñ) $|x|-|x-9|-|x-2| \leq -4+|4x-12|$

o) $\dfrac{|1-x|+2|x-8|-6|2-x|}{|x-1|+2|x+2|} < 3$

p) $\dfrac{-2|x+7|-|x+2|+|1-x|}{|2x-1|+2|x+2|} \geq 4$

q) $\dfrac{|x-8|-2|4x-1|+|x|}{|x-2|+|x|} > 1$

r) $\dfrac{|x|-5|x+1|-2|x+3|}{|x-7|+|2x-1|+3|x+2|} \leq -1$

s) $||2x-1|-|x|| \geq |x+1|$

t) $\left|\dfrac{|x|-2x}{x+2}\right| < 3$

u) $\dfrac{|3|x-1|-4|}{|x|-3} \geq 2$

✍**26.** Demostrar que:

a) $|2x-3| < 5 \Longrightarrow 3 \leq \sqrt{x^2+9} < 5$

b) $|0.2x+3| < 5 \Longrightarrow \dfrac{42}{|x|+2} > 1$

✍**27.** Resolver los siguientes inecuaciones:

a) $[\![x^2 - 2x - 2]\!] > 5$

b) $\left[\!\!\left[\dfrac{|x+2|-1}{|x+7|}\right]\!\!\right] > 2.5$

c) $\left[\!\!\left[\dfrac{|x+5|-|x+1|}{|x-2|-3}\right]\!\!\right] > 1.5$

d) $\left[\!\!\left[\dfrac{|2-x|-x}{3+|x-1|}\right]\!\!\right] < 3$

e) $\left[\!\!\left[\dfrac{|x|-6x}{12+|x|}\right]\!\!\right] < 7.6$

f) $\left[\!\!\left[\dfrac{2|x-6|-|x-2|}{1+|x-7|}\right]\!\!\right] \geq -3.6$

g) $\left[\!\!\left[\dfrac{|x-3|-|x+1|+|7-x|}{1-|x|}\right]\!\!\right] \leq -4.25$

h) $\left[\!\!\left[\dfrac{|x-1|+|x+1|}{|x-3|+|x-2|}\right]\!\!\right] > -9$

✍**28.** Sea $\Omega = \{x \in \mathbb{R} : [\![x-1]\!] = 3 \longleftrightarrow [\![\sqrt{10-3x-x^2}]\!]^2 \leq 9\}$. Expresar el conjunto Ω, como unión de intervalos.

✍**29.** Exprese como unión de intervalos el conjunto:

$$\Lambda = \left\{x \in \mathbb{R} - \{-3, 2\} : \frac{1}{(x+3)(x-2)} > -\frac{1}{8}\right\}$$

✍**30.** Sea el conjunto

$$\Omega = \left\{\frac{x^2}{x^2+1} : ||x-2|-1| < 2\right\}$$

Hallar Ω^C.

✍**31.** Sean los conjuntos $\Omega_1 = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - x < 2 - x < x^2 - 2x\}$ y $\Omega_2 = \left\{x \in \mathbb{R} : \dfrac{2x-1}{x+2} \geq 3\right\}$. Determine $\Omega_2 \cap \Omega_1^C$.

✍**32.** Hallar $\Omega \cap \Sigma$, donde $\Omega = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{x - \sqrt{x^2-4x+7} - \sqrt{x-4}} \geq 1\}$ y $\Sigma = \left\{x \in \mathbb{R} : |2x-8| - |x-7| + 2\dfrac{|x-1|}{|x+2|} < \dfrac{1}{2}\right\}$.

5

Relaciones y funciones

La introducción elemental de relaciones y funciones son muy importantes para estudios de funciones varias variables y entre otros y cuya finalidad del capítulo es dar a conocer dominio y rango de funciones de sola variable y así, como sus gráficas. Los libros principales en que está basado el capítulo son [12, 18, 24]. Para ampliar los temas mencionados puede encontrar en los textos [6, 15, 21].

5.1. Producto cartesiano

Definición 5.1.1

El par ordenado es definido por

$$\boxed{(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}} \tag{5.1}$$

Igualdad de pares ordenados:

$$(x, y) = (z, w) \Longleftrightarrow x = z \wedge y = w \tag{5.2}$$

Ejemplo 5.1.1

Si $(x^2 - x - 11, 10) = (1, y^2 - 3y)$, *encontrar* $x - y$.
Solución. *Tenemos*

$$\begin{aligned} (x^2 - x - 11, 10) = (1, y^2 - 3y) &\Longleftrightarrow x^2 - x - 11 = 1 \wedge y^2 - 3y = 10 \\ &\Longleftrightarrow x^2 - x - 12 = 0 \wedge y^2 - 3y - 10 = 0 \\ &\Longleftrightarrow (x-4)(x+3) = 0 \wedge (y-5)(y+2) = 0 \\ &\Longleftrightarrow (x = 4 \vee x = -3) \wedge (y = 5 \vee y = -2) \end{aligned}$$

De donde,

$x - y = 4 - 5 = -1, x - y = 4 - (-2) = 6, x - y = -3 - 5 = -8, x - y = -3 - (-2) = -1.$

Por lo tanto, los valores de $x - y$ *son:* -1, 6 *y* -8.

Definición 5.1.2

Producto cartesiano de dos conjuntos X y Y, es denotado por $X \times Y$, y es definido por:

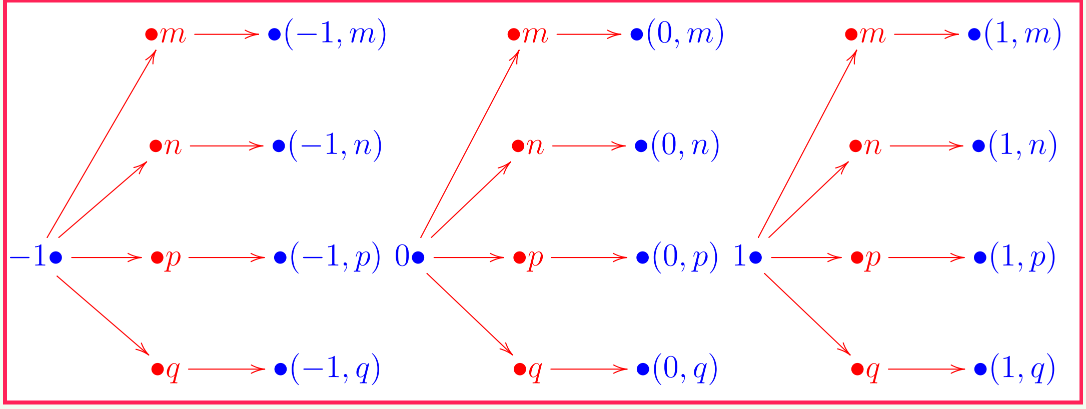
$$\boxed{X \times Y := \{(x,y) : x \in X \wedge y \in Y\}} \tag{5.3}$$

Ejemplo 5.1.2

Sean $X = \{-1, 0, 1\}$ y $Y = \{m, n, p, q\}$. Calcular $X \times Y$.

Solución.

Figura 5.1: $X \times Y$



Por lo tanto,

$$\begin{aligned} X \times Y = &\{(-1,m), (-1,n), (-1,p), (-1,q), (0,m), (0,n), (0,p), (0,q), (1,m), \\ &(1,n), (1,p), (1,q)\} \end{aligned}$$

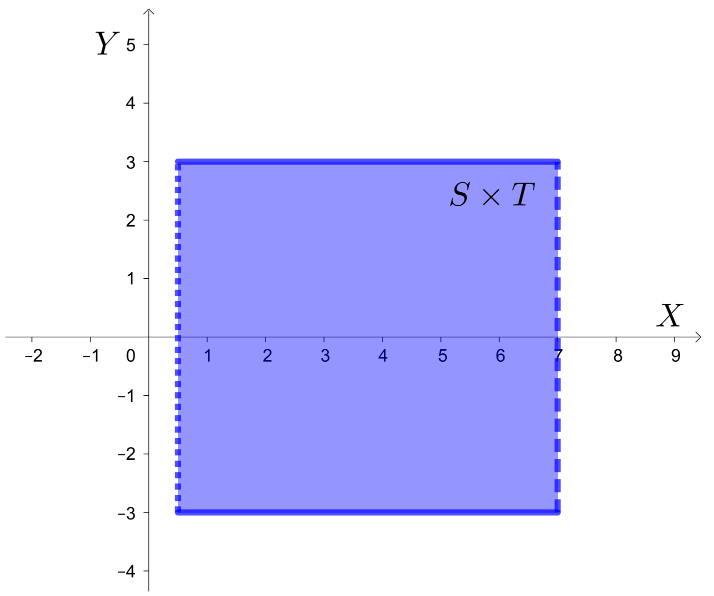
Ejemplo 5.1.3

Sean $S = \langle 0.5, 7\rangle$ y $T = [-3, 3]$. Defina $S \times T$ y grafique.

Solución.

$$S \times T = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : 0.5 < x < 7 \wedge -3 \leq y \leq 3\}$$

Figura 5.2: Gráfica de $S \times T$.



5.2. Relaciones

Definición 5.2.1

Una relación *de un conjunto X en otro conjunto Y, es un subconjunto de $X \times Y$.*

$$\mathcal{R} \text{ es una relación } X \text{ en } Y \iff \mathcal{R} \subset X \times Y$$

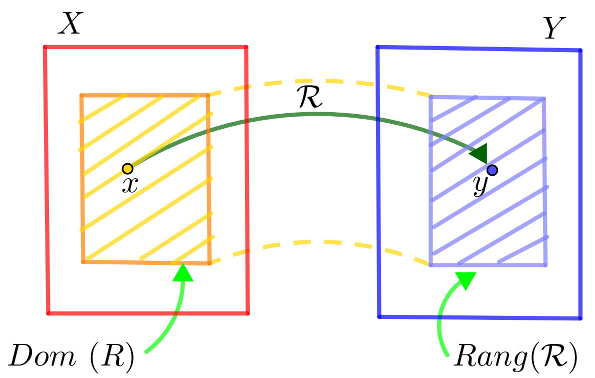
Definición 5.2.2

Sea $\mathcal{R} \subset X \times Y$, se definen

$$\mathrm{Dom}(\mathcal{R}) := \{x \in X : \exists y \in Y, (x, y) \in \mathcal{R}\}, \tag{5.4}$$

$$\mathrm{Rang}(\mathcal{R}) := \{y \in Y : \exists x \in X, (x, y) \in \mathcal{R}\} \tag{5.5}$$

Figura 5.3: Dominio y rango de $\mathcal{R}$.



Ejemplo 5.2.1

Sean $X = \{-3, -2, -1\}$ *y* $Y = \{1, 2, 3\}$ *conjuntos. Considere las relaciones:*

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_1 &= \{(x, y) \in X \times Y : x + y = 0\},\\ \mathcal{R}_2 &= \{(x, y) \in X \times Y : x + y < 2\}\end{aligned}$$

Hallar $\{x : (-3, x) \in \mathcal{R}_1 \vee (-2, x) \in \mathcal{R}_1\}) \cap \{-x : (x, 1) \in \mathcal{R}_2\}$ *y* $\mathrm{Rang}(\mathcal{R}_1) \cap \mathrm{Rang}(\mathcal{R}_2)$.

Solución.

$$\begin{aligned}-3 + 3 = 0 &\Longrightarrow (-3, 3) \in \mathcal{R}_1\\ -2 + 2 = 0 &\Longrightarrow (-2, 2) \in \mathcal{R}_1\\ -1 + 1 = 0 &\Longrightarrow (-1, 1) \in \mathcal{R}_1\end{aligned}$$

De donde, $\mathcal{R}_1 = \{(-3, 3), (-2, 2), (-1, 1)\}$.

$$\begin{aligned}-3 + 1 = -2 < 2(V) &\Longrightarrow (-3, 1) \in \mathcal{R}_2\\ -3 + 2 = -1 < 2(V) &\Longrightarrow (-3, 2) \in \mathcal{R}_2\\ -3 + 3 = 0 < 2(V) &\Longrightarrow (-3, 3) \in \mathcal{R}_2\\ -2 + 1 = -1 < 2(V) &\Longrightarrow (-2, 1) \in \mathcal{R}_2\\ -2 + 2 = 0 < 2(V) &\Longrightarrow (-2, 2) \in \mathcal{R}_2\\ -2 + 3 = 1 < 2(V) &\Longrightarrow (-2, 3) \in \mathcal{R}_2\\ -1 + 1 = 0 < 2(V) &\Longrightarrow (-1, 1) \in \mathcal{R}_2\\ -1 + 2 = 1 < 2(V) &\Longrightarrow (-1, 2) \in \mathcal{R}_2\\ -1 + 3 = 2 < 2(F) &\Longrightarrow (-1, 3) \notin \mathcal{R}_2\end{aligned}$$

De ahí, $\mathcal{R}_2 = \{(-3, 1), (-3, 2), (-3, 3), (-2, 1), (-2, 2), (-2, 3), (-1, 1), (-1, 2)\}$.
Por lo tanto,

$\{x : (-3, x) \in \mathcal{R}_1 \vee (-2, x) \in \mathcal{R}_1\} \cap \{-x : (x, 1) \in \mathcal{R}_2\} = \{3, 2\} \cap \{3, 2, 1\} = \{3, 2\}$
$\mathrm{Rang}(\mathcal{R}_1) \cap \mathrm{Rang}(\mathcal{R}_2) = \{1, 2, 3\} \cap \{1, 2, 3\} = \{1, 2, 3\}$

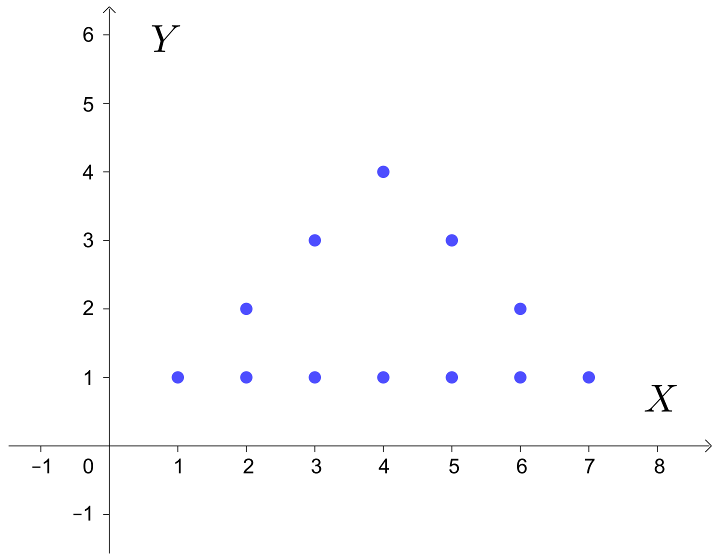
Ejemplo 5.2.2

Graficar la relación

$\mathcal{R} = \{(1, 1), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 3), (6, 2), (6, 1), (7, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 1)\}$

Solución.

Figura 5.4: Gráfica de la relación $\mathcal{R}$.



Ejemplo 5.2.3

Gráfica la relación:

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : |x - 4| \geq y^2 - 9\} \tag{5.6}$$

Solución.

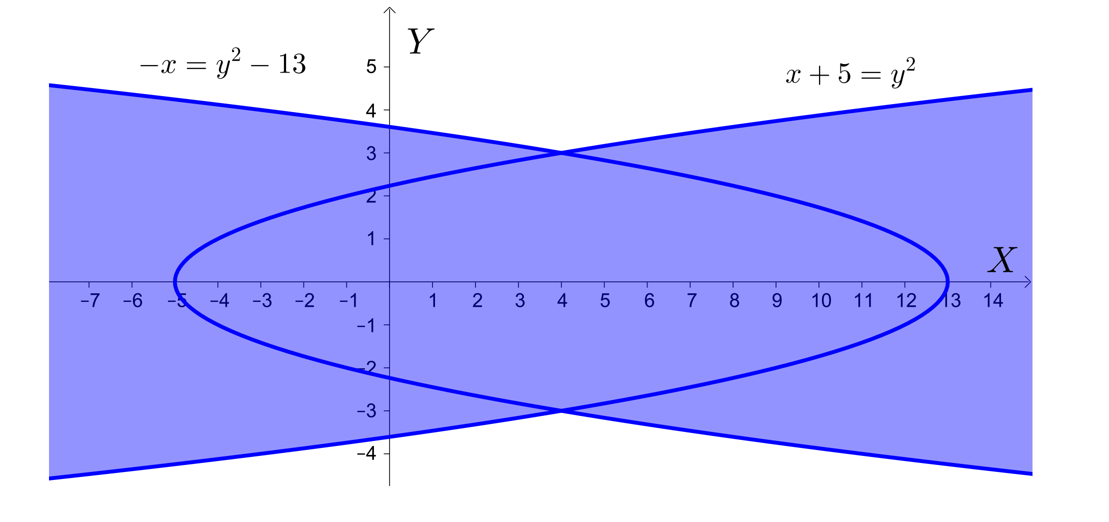
1. *Para $x \geq 4$, tenemos:*

$$|x - 4| \geq y^2 - 9 \Longleftrightarrow x - 4 \geq y^2 - 9 \Longleftrightarrow x + 5 \geq y^2 \tag{5.7}$$

2. *Para $x < 4$, obtenemos*

$$|x - 4| \geq y^2 - 9 \Longleftrightarrow -x + 4 \geq y^2 - 9 \Longleftrightarrow -x + 13 \geq y^2 \tag{5.8}$$

Figura 5.5: $|x-4| \geq y^2 - 9$.



El gráfico de la relación $\mathcal{R}$, es la región sombreada de color azul.

Ejemplo 5.2.4

Graficar la relación $\mathcal{R} = \{(x, y) : |x-2| + |y-7| < 5\}$, y determinar su dominio y rango.

Solución.

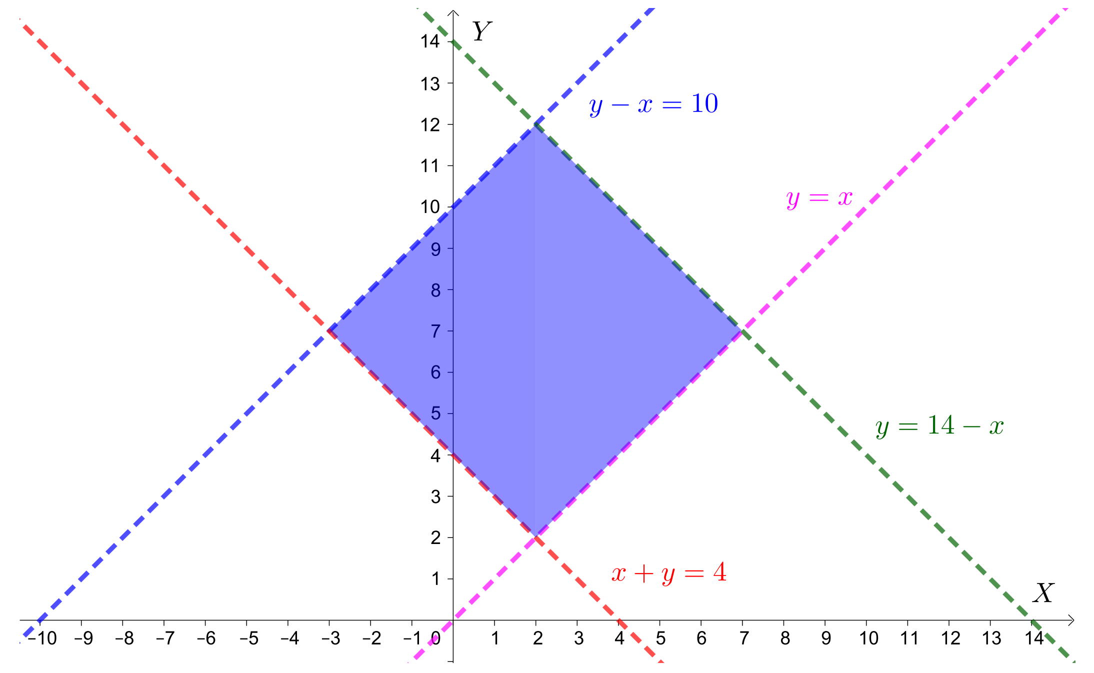
1. *Para $x \geq 2$:*

$$\begin{aligned} |x-2| + |y-7| < 5 &\iff x - 2 + |y-7| < 5 \\ &\iff |y-7| < 7 - x \\ &\iff 7 - x > 0 \wedge -(7-x) < y - 7 < 7 - x \\ &\iff x < 7 \wedge -(7-x) < y - 7 \wedge y - 7 < 7 - x \\ &\iff x < 7 \wedge x < y \wedge y < 14 - x \end{aligned}$$

2. *Para $x < 2$:*

$$\begin{aligned} |x-2| + |y-7| < 5 &\iff -x + 2 + |y-7| < 5 \\ &\iff |y-7| < x + 3 \\ &\iff x + 3 \geq 0 \wedge -x - 3 < y - 7 < x + 3 \\ &\iff x > -3 \wedge x + y > 4 \wedge y - x < 10 \end{aligned}$$

Figura 5.6: Gráfico de la relación $\mathcal{R}$.



Según el Gráfico 5.6, tenemos $\text{Dom}(\mathcal{R}) = \langle -3, 7\rangle$ *y* $\text{Rang}(\mathcal{R}) = \langle 2, 12\rangle$.

Definición 5.2.3

Una relación $\mathcal{R}$, en un conjunto X es una relación de equivalencia si cumple las siguientes propiedades:

1. $\forall x \in X,\ (x, x) \in \mathcal{R}$ *(Reflexiva)*,
2. $(x, y) \in \mathcal{R} \Longrightarrow (y, x) \in \mathcal{R}$ *(Simétrica)*,
3. $(x, y) \in \mathcal{R} \wedge (y, z) \in \mathcal{R} \Longrightarrow (x, z) \in \mathcal{R}$ *(Transitiva)*.

Ejemplo 5.2.5

Verificar si la relación:
$\mathcal{R} = \{(\star, \star), (\star, \sharp), (\square, \square), (\triangle, \sharp), (\triangle, \triangle), (\sharp, \sharp), (\sum, \sum), (\sharp, \triangle), (\sharp, \star)\}$ *es una relación de equivalencia en* $X = \{\star, \square, \triangle, \sharp, \sum\}$.

Solución.

1. $\mathcal{R}$ *es reflexiva ya que,*
$$(\star, \star) \in \mathcal{R}, (\square, \square) \in \mathcal{R}, (\triangle, \triangle) \in \mathcal{R}, (\sharp, \sharp) \in \mathcal{R}, (\sum, \sum) \in \mathcal{R}.$$
2. $\mathcal{R}$ *es simétrica puesto que*
$$\begin{aligned}(\star, \sharp) \in \mathcal{R} &\Longrightarrow (\sharp, \star) \in \mathcal{R}\\ (\triangle, \sharp) \in \mathcal{R} &\Longrightarrow (\sharp, \triangle) \in \mathcal{R}\\ (\sharp, \triangle) \in \mathcal{R} &\Longrightarrow (\triangle, \sharp) \in \mathcal{R}\\ (\sharp, \star) \in \mathcal{R} &\Longrightarrow (\star, \sharp) \in \mathcal{R}\end{aligned}$$

3. *$\mathcal{R}$ no es transitiva porqué,*

$$\underbrace{(\star,\sharp)\in\mathcal{R}}_{V}\wedge\underbrace{(\sharp,\triangle)\in\mathcal{R}}_{V}\Longrightarrow\underbrace{(\star,\triangle)\in\mathcal{R}}_{F}$$

es falso.

Por lo tanto, $\mathcal{R}$ no es relación de equivalencia.

Ejemplo 5.2.6

Demuestre que la relación

$$\mathcal{R}=\{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}:m-n=7k,k\in\mathbb{Z}\},\tag{5.9}$$

en $\mathbb{Z}$, es una relación de equivalencia.

Solución.

1. *$(m,m)\in\mathcal{R}$, pues $m-m=0=7(0)$. De ahí, $\mathcal{R}$, es reflexiva.*

2. *$\mathcal{R}$ es simétrica ya que,*

$$\begin{aligned}(m,n)\in\mathcal{R}&\Longrightarrow m-n=7k,k\in\mathbb{Z}\\&\Longrightarrow n-m=7(-k),-k\in\mathbb{Z}\\&\Longrightarrow (n,m)\in\mathcal{R}\end{aligned}$$

3. *$\mathcal{R}$ es transitiva pues,*

$$\begin{aligned}(m,n)\in\mathcal{R}\wedge(n,p)\in\mathcal{R}&\Longrightarrow m-n=7k_1,n-p=7k_2,k_1,k_2\in\mathbb{Z}\\&\Longrightarrow m-p=(m-n)+(n-p)=7(k_1+k_2),k_1+k_2\in\mathbb{Z}\\&\Longrightarrow (m,p)\in\mathcal{R}\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.

Ejemplo 5.2.7

Sea $\mathcal{T}$ el conjunto de todos los triángulos en un plano Euclidiano. Definimos la relación de semejanza:

$$\triangle\ ABC\sim\triangle\ \hat{A}\hat{B}\hat{C}\Longleftrightarrow\sphericalangle A=\sphericalangle\hat{A},\sphericalangle B=\sphericalangle\hat{B},\sphericalangle C=\sphericalangle\hat{C}\tag{5.10}$$

¿La relación $\sim$, es una relación de equivalencia?

Solución.

1. *$\triangle\ ABC\sim\triangle\ ABC$, puesto que $\sphericalangle A=\sphericalangle A$, $\sphericalangle B=\sphericalangle B$ y $\sphericalangle C=\sphericalangle C$.*

2. *Supongamos que $\triangle\ ABC\sim\triangle\ \hat{A}\hat{B}\hat{C}$. Entonces $\sphericalangle A=\sphericalangle\hat{A}$, $\sphericalangle B=\sphericalangle\hat{B}$ y $\sphericalangle C=\sphericalangle\hat{C}$. Esto es lo mismo que $\sphericalangle\hat{A}=\sphericalangle A$, $\sphericalangle\hat{B}=\sphericalangle B$ y $\sphericalangle\hat{C}=\sphericalangle C$, y por ello $\triangle\ \hat{A}\hat{B}\hat{C}\sim\triangle\ ABC$.*

3. *Supongamos que $\triangle\ ABC\sim\triangle\ \hat{A}\hat{B}\hat{C}$ y $\triangle\ \hat{A}\hat{B}\hat{C}\sim\triangle\ A'B'C'$. Entonces $\sphericalangle A=$*

$\sphericalangle\hat{A}$, $\sphericalangle B = \sphericalangle\hat{B}$, $\sphericalangle C = \sphericalangle\hat{C}$ y $\sphericalangle\hat{A} = \sphericalangle A'$, $\sphericalangle\hat{B} = \sphericalangle B'$, $\sphericalangle\hat{C} = \sphericalangle C'$. De donde, $\sphericalangle A = \sphericalangle A'$, $\sphericalangle B = \sphericalangle B'$ y $\sphericalangle C = \sphericalangle C'$. Por lo tanto, $\triangle\ ABC \sim \triangle\ A'B'C'$.

De 1, 2 y 3, la relación $\sim$, es una relación de equivalencia.

5.3. Relación inversa

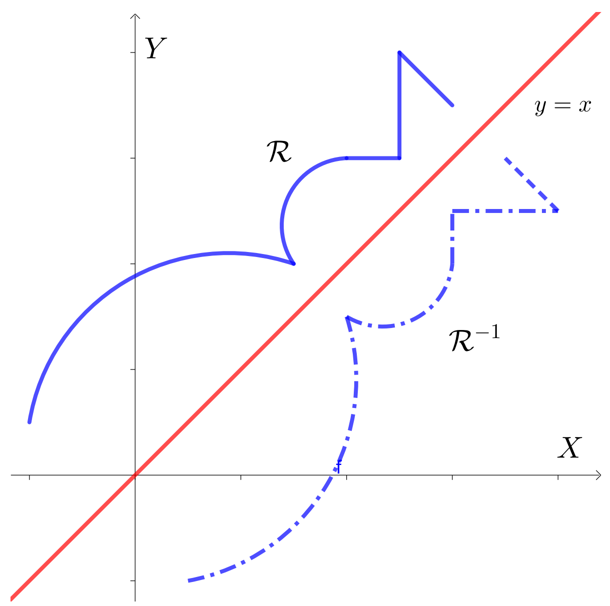
Definición 5.3.1

Sea $\mathcal{R}$ una relación de X en Y, se define la relación inversa de Y en X:

$$\boxed{\mathcal{R}^{-1} := \{(y,x) : (x,y) \in \mathcal{R}\}} \tag{5.11}$$

Si la relación $\mathcal{R}$, es un subconjunto $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, entonces el gráfico de $\mathcal{R}^{-1}$, se dibuja en el plano cartesiano XY, como se observe la figura 5.7.

Figura 5.7: Gráfico de la relación $\mathcal{R}^{-1}$.



Ejemplo 5.3.1

Sea la relación

$$\mathcal{R} := \{(-\pi,-2),(-\pi,0),(e,0),(e,2),(\sqrt{3},3),(-\sqrt{3},-2)\} \tag{5.12}$$

Hallar $\mathcal{R}^{-1}$.
Solución.

$$\mathcal{R}^{-1} = \{(-2,-\pi),(0,-\pi),(0,e),(2,e),(3,\sqrt{3}),(-2,-\sqrt{3})\}$$

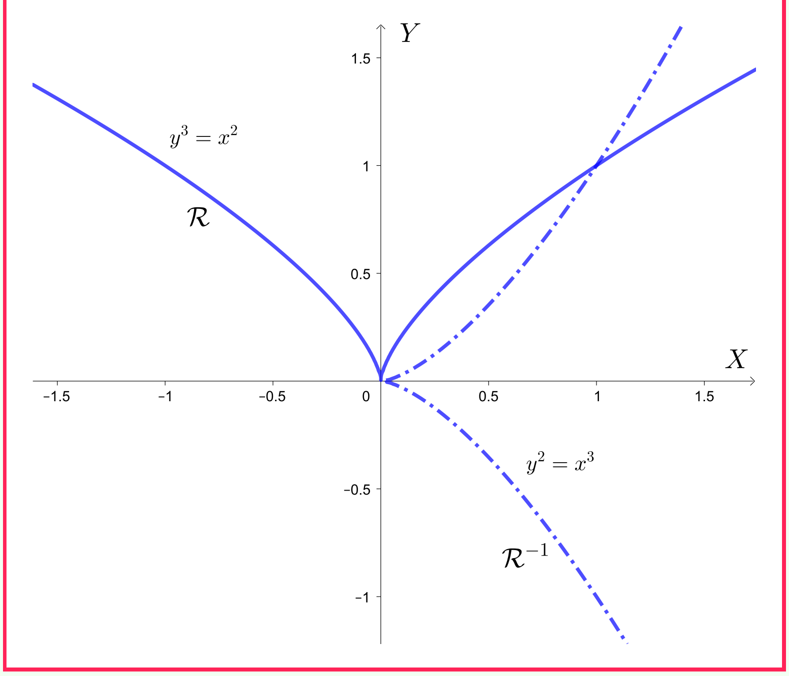
Ejemplo 5.3.2

Graficar $\mathcal{R}^{-1}$, *donde* $\mathcal{R} = \{(x, y) : x^2 = y^3\}$.
Solución. *Por definición se tiene:*

$$\mathcal{R}^{-1} = \{(x, y) : (y, x) \in \mathcal{R}\} = \{(x, y) : y^2 = x^3\}$$

La inversa está dada por $y^2 = x^3$ *y cuya gráfica pueder ver la figura 5.8.*

Figura 5.8: Gráfico de la relación $\mathcal{R}^{-1}$.



5.4. Funciones

Definición 5.4.1

Una función de X *en* Y*, es una relación* $f \subset X \times Y$*, con propiedad: para todo* $x \in X$*, existe un único* $y \in Y$ *tal que* $(x, y) \in f$*.*

$$\boxed{(x, y) \in f \Longleftrightarrow xfy} \tag{5.13}$$

Ejemplo 5.4.1

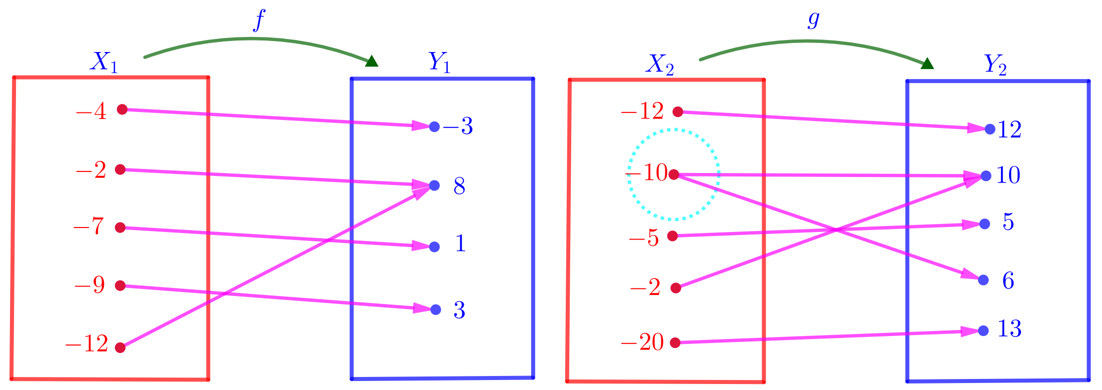
Sean las relaciones:

$$\begin{aligned} f &= \{(-4, -3), (-2, 8), (-7, 1), (-9, 3), (-12, 8)\} \qquad y \\ g &= \{(-12, 12), (-10, 10), (-5, 5), (-2, 10), (-10, 6), (-20, 13)\} \end{aligned}$$

¿Cuál(es) es(son) una función?

Solución. *La primera relación f, tiene el dominio $X_1 = \{-4, -2, -7, -9, -12\}$ y el rango $Y_1 = \{-3, 8, 1, 3\}$; la segunda relación g tiene el dominio, $X_2 = \{-20, -12, -10, -5, -2\}$ y el rango $Y_2 = \{12, 10, 5, 6, 13\}$. El primero cumple la definición de una función, en cuanto a g no cumple, puesto que, -10 hace corresponder a 10 y a 6 como puede verse en el gráfico 5.9.*

Figura 5.9: Gráficas de las funciones f y g.



Determinación del dominio de una función:

Tenemos dos casos:

1. Si $y = f(x)$, entonces el conjunto formado por todos los valores x, de modo que $f(x)$, sea un número real, viene ser el dominio de la función f.
2. Si $f : X \longrightarrow Y$, $y = f(x)$ es una función entonces el dominio es X.

Ejemplo 5.4.2

Hallar el dominio y el rango de la función

$$f = \{(0, 4), (1, 5), (3, 8), (4, 4), (11, 9), (6, 19), (7, 8)\} \tag{5.14}$$

Solución. *Los elementos del dominio de f son las primeras componentes, es decir,*

$$\text{Dom}(f) = \{0, 1, 3, 4, 6, 7, 11\}$$

El rango tiene como elementos a las segundas componentes de los elementos de f, o sea,

$$\text{Rang}(f) = \{4, 5, 8, 9, 19\}$$

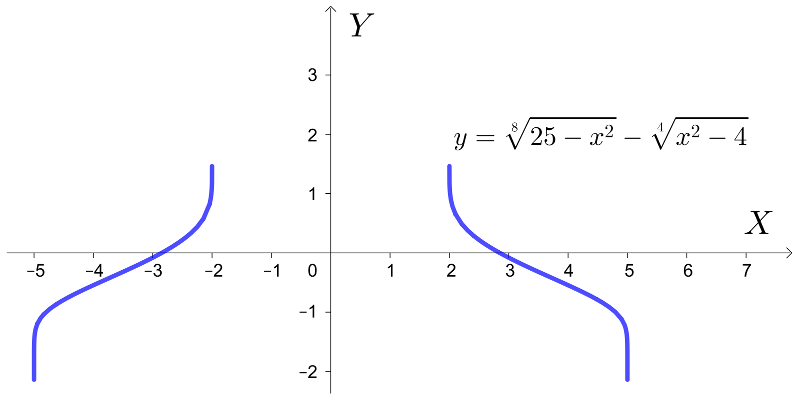
Ejemplo 5.4.3

Encontrar el dominio de la función:

$$f(x) = \sqrt[8]{25 - x^2} - \sqrt[4]{x^2 - 4} \tag{5.15}$$

Solución.

Figura 5.10: Gráfico de la función f.



$$\begin{aligned} f(x) \in \mathbb{R} &\iff 25 - x^2 \geq 0 \wedge x^2 - 4 \geq 0 \\ &\iff (x-5)(x+5) \leq 0 \wedge (x-2)(x+2) \geq 0 \\ &\iff x \in [-5, 5] \wedge x \in \langle -\infty, -2] \cup [2, +\infty\rangle \\ &\iff x \in [-5, -2] \cup [2, 5] \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\mathrm{Dom}(f) = [-5, -2] \cup [2, 5]$$

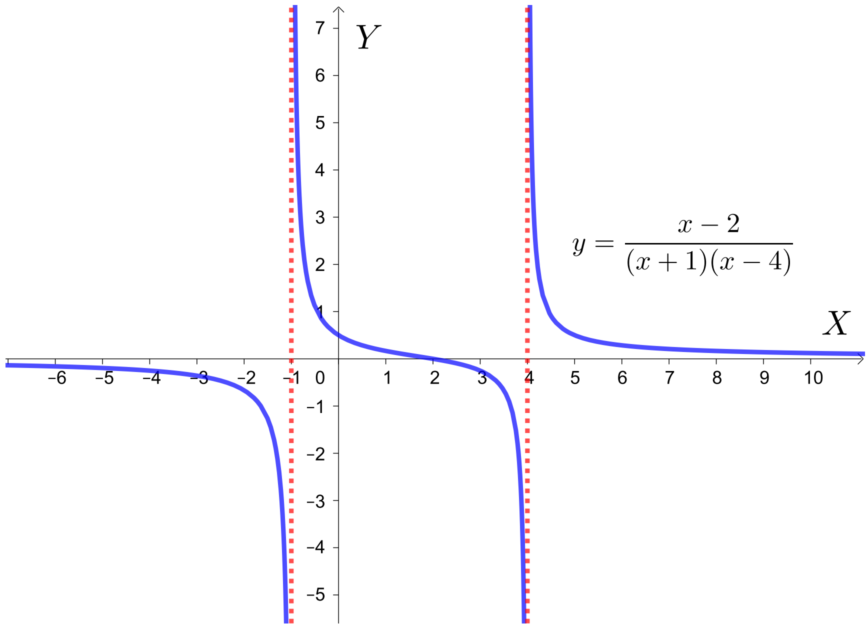
Ejemplo 5.4.4

Calcular el dominio de

$$h(x) = \frac{x-2}{(x+1)(x-4)} \tag{5.16}$$

Solución.

Figura 5.11: Gráfico de la función h.



Como $h(-1) = \dfrac{-3}{0}$, $h(4) = \dfrac{2}{0}$, *no son elementos de* $\mathbb{R}$ *(indeterminados), entonces*

$$\text{Dom}(h) = \mathbb{R} - \{-1, 4\}$$

Funciones básicas:

I) La función constante, está definida por la ecuación:

$$y = C, \tag{5.17}$$

donde C es constante real.

II) La función identidad, está definida por

$$y = x. \tag{5.18}$$

III) La función signo, está definida por

$$y = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x > 0, \\ 0 & \text{si} \quad x = 0, \\ -1 & \text{si} \quad x < 0. \end{cases} \tag{5.19}$$

IV) La función valor absoluto, está definida por

$$y = |x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0, \\ -x & \text{si} \quad x < 0. \end{cases} \tag{5.20}$$

V) La función máximo entero, está definida por

$$y = [\![x]\!] = \text{máx}\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\} \tag{5.21}$$

Se demuestra que: $\boxed{[\![x]\!] = n \iff n \leq x < n+1}$

VI) La función raíz cuadrada, está definida por

$$y = \sqrt{x} \tag{5.22}$$

Ejemplo 5.4.5

Graficar la función

$$h(x) = \text{sgn}\left(x^2 - 121\right) \tag{5.23}$$

Solución. *Para* sgn *analizamos los siguientes casos:*

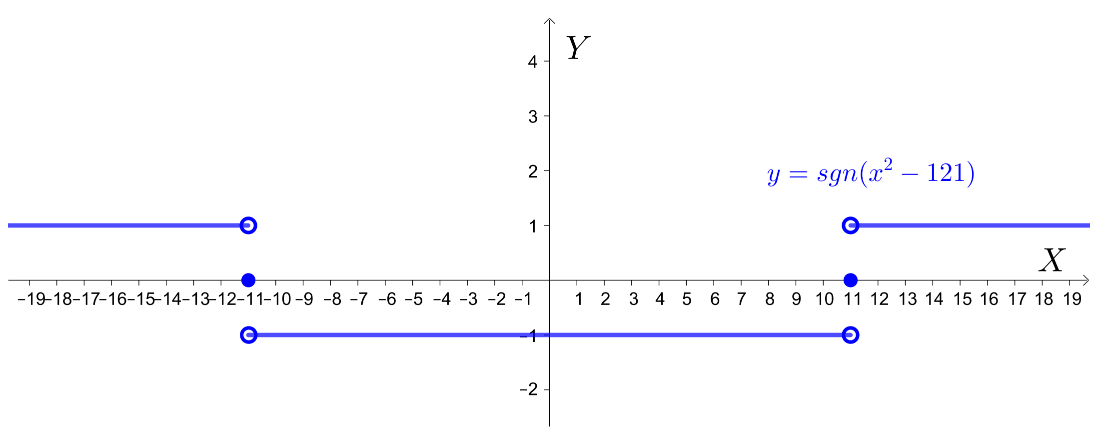
$$\begin{aligned}
x^2 - 121 > 0 &\iff (x-11)(x+11) > 0 \\
&\iff x \in \langle -\infty, -11\rangle \cup \langle 11, +\infty\rangle \\
x^2 - 121 = 0 &\iff (x-11)(x+11) = 0 \\
&\iff x = 11 \vee x = -11 \\
x^2 - 121 < 0 &\iff (x-11)(x+11) < 0 \\
&\iff x \in \langle -11, 11\rangle
\end{aligned}$$

De esto,

$$h(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in \langle -\infty, -11\rangle \cup \langle 11, +\infty\rangle, \\ 0 & si \quad x = -11 \vee x = 11, \\ -1 & si \quad x \in \langle -11, 11\rangle. \end{cases}$$

Finalmente, graficamos h:

Figura 5.12: Gráfico de la función $y = h(x)$.



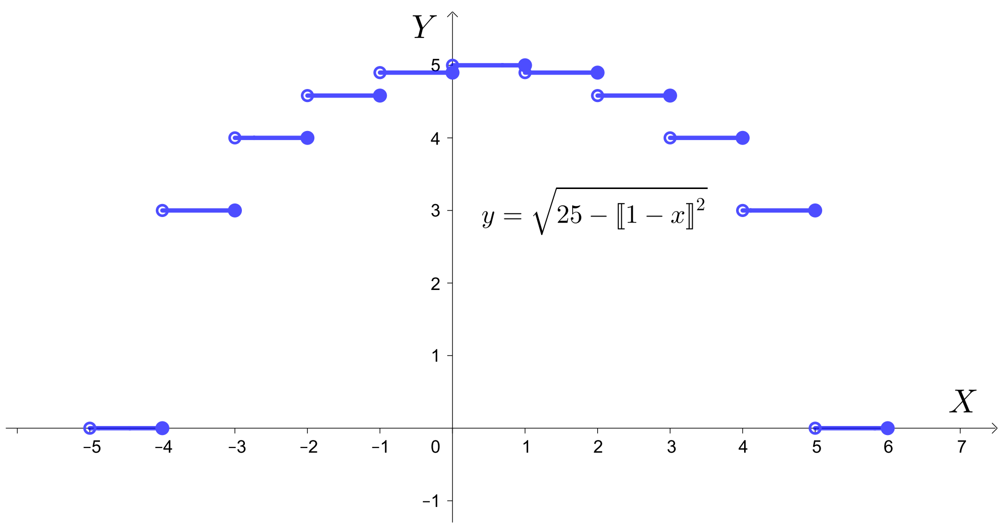
Ejemplo 5.4.6

Hallar el dominio de la función

$$t(x) = \sqrt{25 - [\![1-x]\!]^2} \tag{5.24}$$

Solución.

Figura 5.13: Gráfico de la función t.



$$\begin{aligned} t(x) \in \mathbb{R} &\iff 25 - [\![1-x]\!]^2 \geq 0 \\ &\iff [\![1-x]\!]^2 \leq 25 \\ &\iff -5 \leq [\![1-x]\!] \leq 5 \\ &\iff [\![1-x]\!] \geq -5 \wedge [\![1-x]\!] \leq 5 \\ &\iff 1-x \geq -5 \wedge 1-x < 6 \\ &\iff x \leq 6 \wedge x > -5 \\ &\iff -5 < x \leq 6 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\mathrm{Dom}(t) = \langle -5, 6]$$

Determinación del rango de una función:

R1). Si $y = f(x)$, despeje $x = g(y)$, el rango es el conjunto formado por todos los valores y de tal manera x, es real.

R2). Si $f : X \longrightarrow Y$, $y = f(x)$ es una función entonces $\text{Rang}(f) = f(X)$, donde $f(X) = \{f(x) : x \in X\}$.

Ejemplo 5.4.7

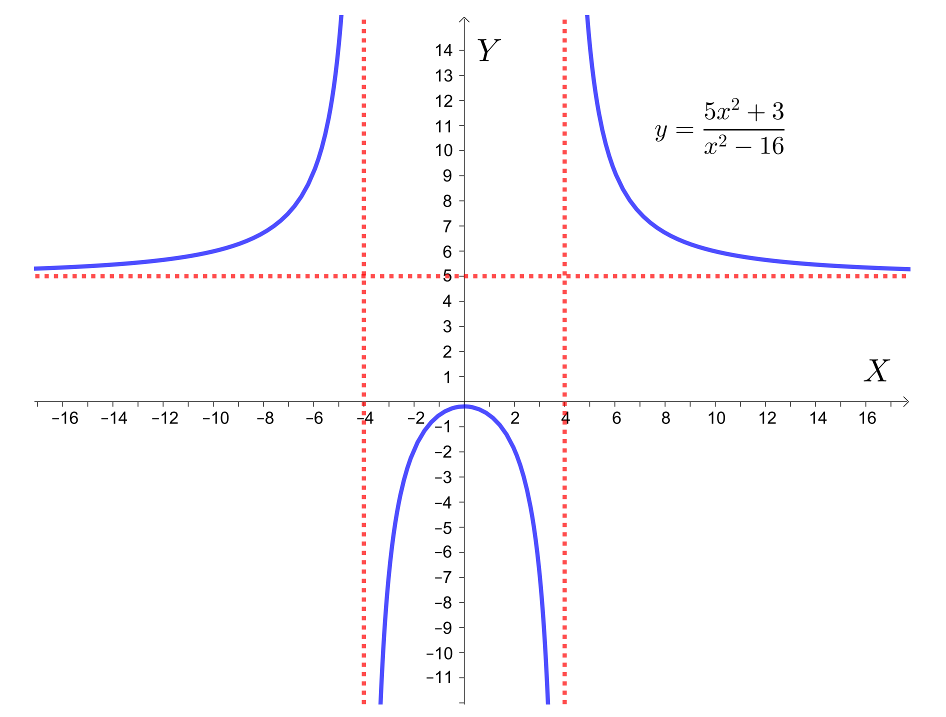
Encontrar el rango de la función

$$y = h(x) = \frac{5x^2+3}{x^2-16} \tag{5.25}$$

Solución.

$$\begin{aligned} y = \frac{5x^2+3}{x^2-16} &\Longleftrightarrow y(x^2-16) = 5x^2+3 \\ &\Longleftrightarrow (y-5)x^2 = 16y+3 \\ &\Longleftrightarrow x^2 = \frac{16y+3}{y-5} \\ &\Longleftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{16y+3}{y-5}} \end{aligned}$$

Figura 5.14: Gráfico de la función $\dfrac{5x^2+3}{x^2-16}$.



Luego,

$$
\begin{aligned}
x \in \mathbb{R} &\iff \frac{16y+3}{y-5} \geq 0 \\
&\iff y \in \langle -\infty, -\frac{3}{16}] \cup \langle 5, +\infty\rangle
\end{aligned} \tag{5.26}
$$

Por lo tanto,

$$\text{Rang}(h) = \langle -\infty, -\frac{3}{16}] \cup \langle 5, +\infty\rangle$$

Ejemplo 5.4.8

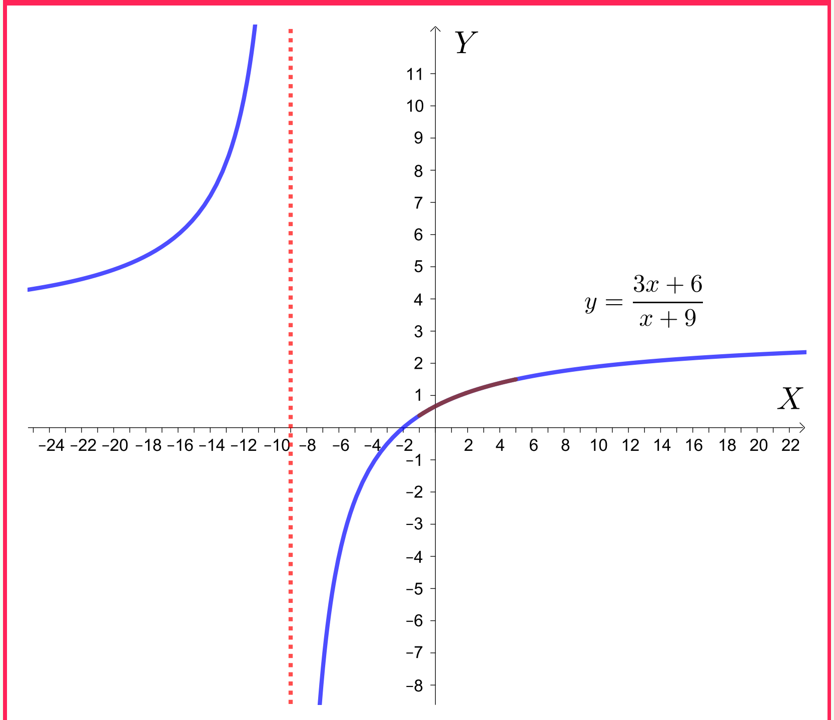
Sea la función $y = g(x) = \dfrac{3x+6}{x+9}$, $x \in [-1, 5]$. *Hallar el rango de* g.

Solución.

Como

$$g(x) = \frac{3x+6}{x+9} = 3 - \frac{21}{x+9} \tag{5.27}$$

Figura 5.15: Gráfico de la función g.



entonces

$$\begin{aligned}
x \in [-1,5] &\Longrightarrow -1 \le x \le 5\\
&\Longrightarrow 8 \le x+9 \le 14\\
&\Longrightarrow -\frac{21}{14} \ge -\frac{21}{x+9} \ge -\frac{21}{8}\\
&\Longrightarrow \frac{21}{14} \ge 3 - \frac{21}{x+9} \ge \frac{3}{8}\\
&\Longleftrightarrow g(x) \in [\frac{3}{8}, \frac{3}{2}]
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

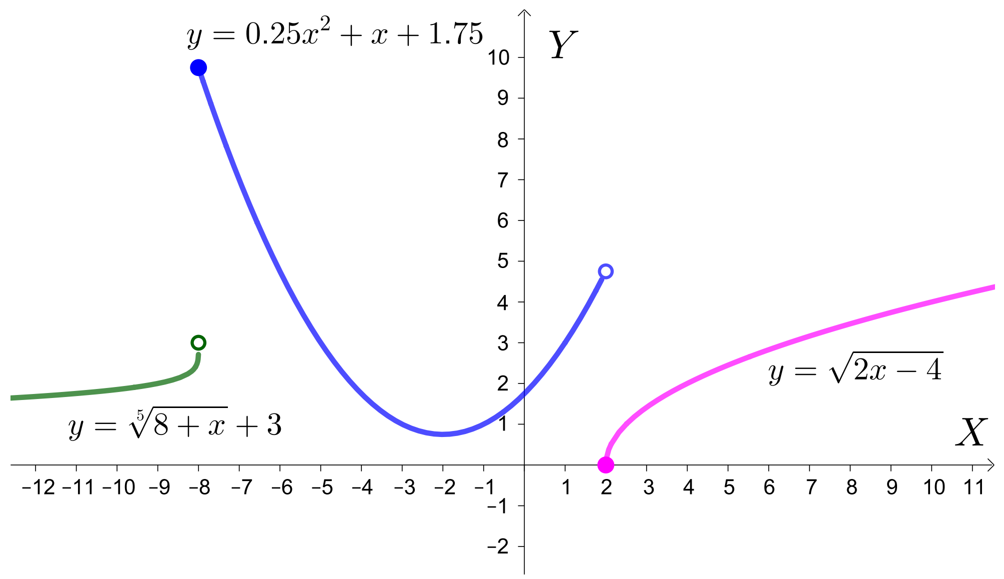
$$\text{Rang}(g) = \left[\frac{3}{8}, \frac{3}{2}\right]$$

Ejemplo 5.4.9

Hallar el rango y la gráfica de la función s,

$$s(x) = \begin{cases} \sqrt{2x-4} & \textit{si} \quad x \ge 2,\\ 0.25x^2 + x + 1.75 & \textit{si} \quad x \in [-8, 2\rangle,\\ \sqrt[5]{8+x} + 3 & \textit{si} \quad x < -8. \end{cases} \tag{5.28}$$

Figura 5.16: Gráfico de la función s.



1. *Sea* $s_1(x) = \sqrt{2x-4}$. *Entonces* $\text{Dom}(s_1) = [2, +\infty\rangle$ *y*

$$\begin{aligned} x \in \text{Dom}(s_1) &\Longrightarrow x \geq 2 \\ &\Longrightarrow 2x - 4 \geq 0 \\ &\Longrightarrow s_1(x) \geq 0 \\ &\Longrightarrow s_1(x) \in [0, +\infty\rangle \\ &\Longrightarrow \text{Rang}(s_1) = [0, +\infty\rangle \end{aligned}$$

2. *Sea* $s_2(x) = 0.25x^2 + x + 1.75$. *Entonces* $\text{Dom}(s_2) = [-8, 2\rangle$ *y luego,*

$$\begin{aligned} s_2(x) = 0.25x^2 + x + 1.75 &\Longrightarrow s_2(x) = 0.25(x^2 + 4x) + 1.75 \\ &\Longrightarrow s_2(x) = 0.25[(x+2)^2 - 4] + 1.75 \\ &\Longrightarrow s_2(x) = 0.25(x+2)^2 + 0.75 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} x \in [-8, 2\rangle &\Longrightarrow -6 \leq x + 2 < 4 \\ &\Longrightarrow 0 \leq (x+2)^2 \leq 36 \\ &\Longrightarrow 0 \leq 0.25(x+2)^2 \leq 9 \\ &\Longrightarrow 0.75 \leq 0.25(x+2)^2 + 0.75 \leq 9.75 \\ &\Longrightarrow s_2(x) \in [0.75, 9.75] \\ &\Longrightarrow \text{Rang}(s_2) = [0.75, 9.75] \end{aligned}$$

3. *Sea* $s_3(x) = \sqrt[5]{8+x} + 3$. *De esto,*

$$\begin{aligned} x < -8 &\Longrightarrow 8 + x < 0 \\ &\Longrightarrow \sqrt[5]{8+x} < 0 \\ &\Longrightarrow \sqrt[5]{8+x} + 3 < 3 \\ &\Longrightarrow s_3(x) \in \langle -\infty, 3\rangle \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\text{Rang}(s) = [0, +\infty\rangle \cup [0.75, 9.75] \cup \langle -\infty, 3\rangle = \langle -\infty, +\infty\rangle$$

Ejemplo 5.4.10

Hallar el rango y la gráfica de la función:

$$h(x) = \begin{cases} [\![1 - 0.5x]\!] & si \quad x \leq -1, \\ [\![x+4]\!] - 4 & si \quad -1 < x \leq 6, \\ [\![2 - 0.25x]\!] + 4 & si \quad x > 6 \end{cases} \tag{5.29}$$

Solución.
Consideremos $h_1(x) = [\![1 - 0.5x]\!]$, $h_2(x) = [\![x+4]\!] - 4$ *y* $h_3(x) = [\![2 - 0.25x]\!] + 4$. *Entonces*

1. *Para* $h_1(x)$*:*

$$\begin{aligned} -2 < x \leq -1 &\Longrightarrow 1 > -0.5x \geq 0.5 \\ &\Longrightarrow 2 > 1 - 0.5x \geq 1.5 \\ &\Longrightarrow [\![1 - 0.5x]\!] = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -4 < x \leq -2 &\Longrightarrow 2 > -0.5x \geq -1 \\ &\Longrightarrow 3 > 1 - 0.5 \geq 2 \\ &\Longrightarrow [\![1 - 0.5x]\!] = 2 \\ h_1(x) = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -6 < x \leq -4 &\Longrightarrow -3 < 0.5x \leq 2 \\ &\Longrightarrow 2 \leq -0.5x < 3 \\ &\Longrightarrow 3 \leq 1 - 0.5x < 4 \\ &\Longrightarrow [\![1 - 0.5x]\!] = 3 \\ &\Longrightarrow h_1(x) = 3 \end{aligned}$$

Si $n \in \mathbb{Z}^-$ *y* $n \leq -2$ *entonces:*

$$\begin{aligned} 2n < x \leq 2n + 2 &\Longrightarrow -n > -0.5x \geq -n - 1 \\ &\Longrightarrow 1 - n > 1 - 0.5x \geq -n \\ &\Longrightarrow [\![1 - 0.5x]\!] = -n \\ &\Longrightarrow h_1(x) = -n \end{aligned}$$

2. *Para* $h_2(x) = [\![x + 4]\!] - 4$*:*

$$\begin{aligned} -1 < x < 0 &\Longrightarrow 3 < x + 4 < 4 \\ &\Longrightarrow [\![x + 4]\!] = 3 \\ &\Longrightarrow h_2(x) = 3 - 4 = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 \leq x < 1 &\Longrightarrow 4 \leq x + 4 < 5 \\ &\Longrightarrow [\![x + 4]\!] = 4 \\ &\Longrightarrow h_2(x) = 4 - 4 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 \leq x < 2 &\Longrightarrow 5 \leq x + 4 < 6 \\ &\Longrightarrow [\![x + 4]\!] = 5 \\ &\Longrightarrow h_2(x) = 5 - 4 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 \leq x < 3 &\Longrightarrow 6 \leq x + 4 < 7 \\ &\Longrightarrow [\![x + 4]\!] = 6 \\ &\Longrightarrow h_2(x) = 6 - 4 = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3 \leq x < 4 &\Longrightarrow 7 \leq x + 4 < 8 \\ &\Longrightarrow [\![x + 4]\!] = 7 \\ &\Longrightarrow h_2(x) = 7 - 4 = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4 \leq x < 5 &\Longrightarrow 8 \leq x+4 < 9 \\ &\Longrightarrow [\![x+4]\!] = 8 \\ &\Longrightarrow h_2(x) = 8-4 = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5 \leq x < 6 &\Longrightarrow 9 \leq x+4 < 10 \\ &\Longrightarrow [\![x+4]\!] = 9 \\ &\Longrightarrow h_2(x) = 9-4 = 5 \end{aligned}$$

$$x = 6 \Longrightarrow h_2(x) = [\![6+4]\!] - 4 = 6$$

3. Para $h_3(x) = [\![2-0.25x]\!] + 4$:

$$\begin{aligned} 6 < x \leq 8 &\Longrightarrow -1.5 > -0.25x \geq -2 \\ &\Longrightarrow 0.5 > 2-0.25x \geq 0 \\ &\Longrightarrow [\![2-0.25x]\!] = 0 \\ &\Longrightarrow h_3(x) = 0+4 = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8 < x \leq 12 &\Longrightarrow -2 > -0.25x \geq -3 \\ &\Longrightarrow 0 > 2-0.25x \geq -1 \\ &\Longrightarrow [\![2-0.25x]\!] = -1 \\ &\Longrightarrow h_3(x) = -1+4 = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 12 < x \leq 16 &\Longrightarrow -3 > -0.25x \geq -4 \\ &\Longrightarrow -1 > 2-0.25x \geq -2 \\ &\Longrightarrow [\![2-0.25x]\!] = -2 \\ &\Longrightarrow h_3(x) = -2+4 = 2 \end{aligned}$$

Para $n \in \mathbb{Z}^+$ y $n \geq 2$ tenemos

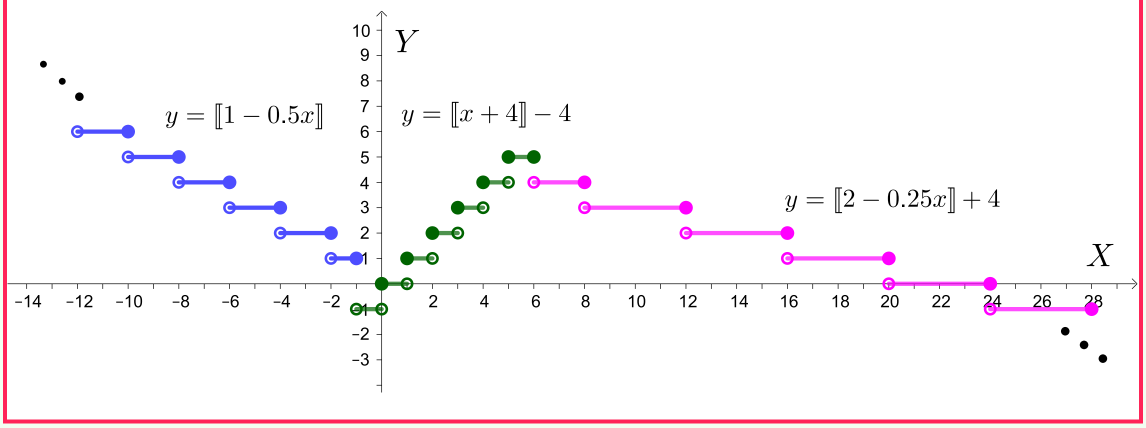
$$\begin{aligned} 4n < x \leq 4n+4 &\Longrightarrow -n > -0.25x \geq -n-1 \\ &\Longrightarrow 2-n > 2-0.25x \geq -n+1 \\ &\Longrightarrow [\![2-0.25x]\!] = -n+1 \\ &\Longrightarrow h_3(x) = -n+1+4 = -n+5 \end{aligned}$$

Calculemos el rango de h:

$$\begin{aligned} \text{Rang}(h) =& h_1(\langle -\infty, -1]) \cup h_2(\langle -1, 6]) \cup h_3(\langle 6, +\infty\rangle) \\ =& \{1, 2, 3, \ldots\} \cup \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\} \cup \{4, 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3, \ldots\} \\ =& \mathbb{Z} \end{aligned}$$

A partir del análisis de encima es dibujado el gráfico h:

Figura 5.17: Gráfico de la función h.



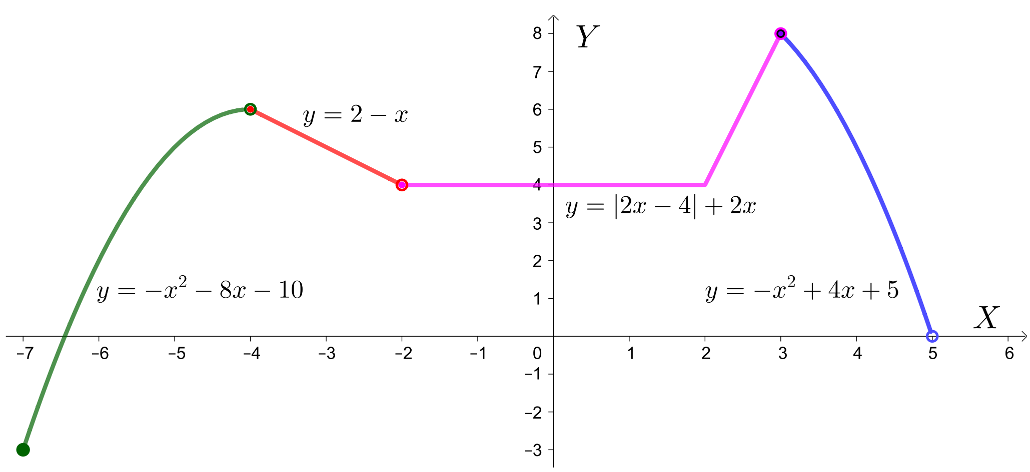
Ejemplo 5.4.11

Hallar el dominio, el rango y dibujar el gráfico de la función:

$$r(x) = \begin{cases} 2 - x & si \quad -4 \leq x < -2, \\ |2x - 4| + 2x & si \quad -2 \leq x < 3, \\ -x^2 - 8x - 10 & si \quad -7 \leq x < -4, \\ -x^2 + 4x + 5 & si \quad 3 \leq x < 5. \end{cases} \tag{5.30}$$

Solución.

Figura 5.18: Gráfico de la función r.



1. *Para* $r_1(x) = 2 - x$, *se tiene* $\mathrm{Dom}(r_1) = [-4, -2\rangle$; *por otro lado,*

$$\begin{aligned} x \in \mathrm{Dom}(r_1) &\Longrightarrow -4 \leq x < -2 \\ &\Longrightarrow 4 \geq -x > 2 \\ &\Longrightarrow 6 \geq 2 - x > 4 \\ &\Longrightarrow r_1(x) \in \langle 4, 6] \\ &\Longrightarrow \mathrm{Rang}(r_1) = \langle 4, 6] \end{aligned}$$

2. *Para* $r_2(x) = |2x - 4| + 2x$, *se obtiene* $\mathrm{Dom}(r_2) = [-2, 3\rangle$; *como* $|2x - 4| = \begin{cases} 2x - 4 & si \quad x \geq 2, \\ -2x + 4 & si \quad x < 2. \end{cases}$ *obtenemos:*

$$\begin{aligned} x \in [-2, 2\rangle &\Longrightarrow r_2(x) = 4 \\ x \in [2, 3\rangle &\Longrightarrow 4 \leq 4x - 4 < 8 \\ &\Longrightarrow r_2(x) = 4x - 4 \in [4, 8\rangle \\ &\Longrightarrow \mathrm{Rang}(r_2) = [4, 8\rangle \end{aligned}$$

3. *Para* $r_3(x) = -x^2 - 8x - 10$, *se tiene* $\mathrm{Dom}(r_3) = [-7, -4\rangle$; *luego, completamos al cuadrado:*

$$r_3(x) = -x^2 - 8x - 10 \Longrightarrow r_3(x) = -(x + 4)^2 + 6$$

Mientras,

$$\begin{aligned} x \in \mathrm{Dom}(r_3) &\Longrightarrow -7 \leq x < -4 \\ &\Longrightarrow -3 \leq x + 4 < 0 \\ &\Longrightarrow 0 < (x + 4)^2 \leq 9 \\ &\Longrightarrow -9 \leq -(x + 4)^2 < 0 \qquad (5.31) \\ &\Longrightarrow -3 \leq 6 - (x + 4)^3 < 6 \\ &\Longrightarrow r_3(x) \in [-3, 6\rangle \\ &\Longrightarrow \mathrm{Rang}(r_3) = [-3, 6\rangle \end{aligned}$$

4. *Para* $r_4(x) = -x^2 + 4x + 5$, *se obtiene* $\mathrm{Dom}(r_4) = [3, 5\rangle$; *en seguida completamos al cuadrado:*

$$r_4(x) = -x^2 + 4x + 5 = -(x - 2)^2 + 9$$

Sin embargo,

$$\begin{aligned} x \in \mathrm{Dom}(r_4) &\Longrightarrow 3 \leq x < 5 \\ &\Longrightarrow 1 \leq (x - 2)^2 < 9 \\ &\Longrightarrow -9 < -(x - 2)^2 \leq -1 \\ &\Longrightarrow 0 < 9 - (x - 2)^2 \leq 8 \\ &\Longrightarrow r_4(x) \in \langle 0, 8] \\ &\Longrightarrow \mathrm{Rang}(r_4) = \langle 0, 8] \end{aligned}$$

Consecuentemente,

$$\begin{aligned} \mathrm{Dom}(r) &= \mathrm{Dom}(r_1) \cup \mathrm{Dom}(r_2) \cup \mathrm{Dom}(r_3) \cup \mathrm{Dom}(r_4) \\ &= [-4, -2\rangle \cup [-2, 3\rangle \cup [-7, -4\rangle \cup [3, 5\rangle \\ &= [-7, 5\rangle \end{aligned} \tag{5.32}$$

y

$$\begin{aligned} \mathrm{Rang}(r) &= \mathrm{Rang}(r_1) \cup \mathrm{Rang}(r_2) \cup \mathrm{Rang}(r_3) \cup \mathrm{Rang}(r_4) \\ &= \langle 4, 6] \cup [4, 8\rangle \cup [-3, 6\rangle \cup \langle 0, 8] \\ &= [-3, 8] \end{aligned} \tag{5.33}$$

5.5. Transformación

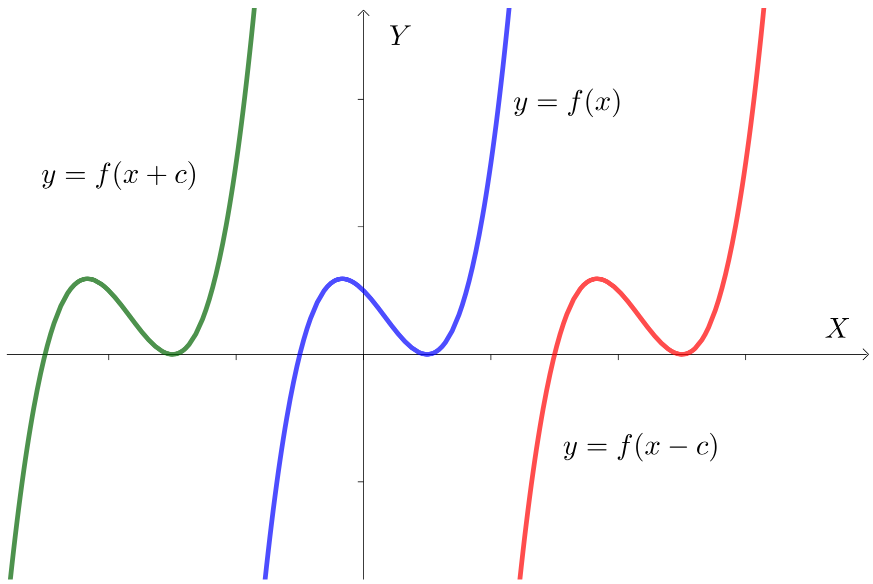
Traslación horizontal

Supongamos que la gráfica de $y = f(x)$, se conoce. Si $c > 0$, es una constante entonces:

TH1) la gráfica de $y = f(x - c)$, es la traslación horizontal de la gráfica $y = f(x)$, c unidades a la derecha.

TH2) la gráfica de $y = f(x + c)$, es la traslación horizontal de la gráfica $y = f(x)$, c unidades a la izquierda.

Figura 5.19: Graficas de las ecuaciones $y = f(x + c)$ y $y = f(x - c)$.



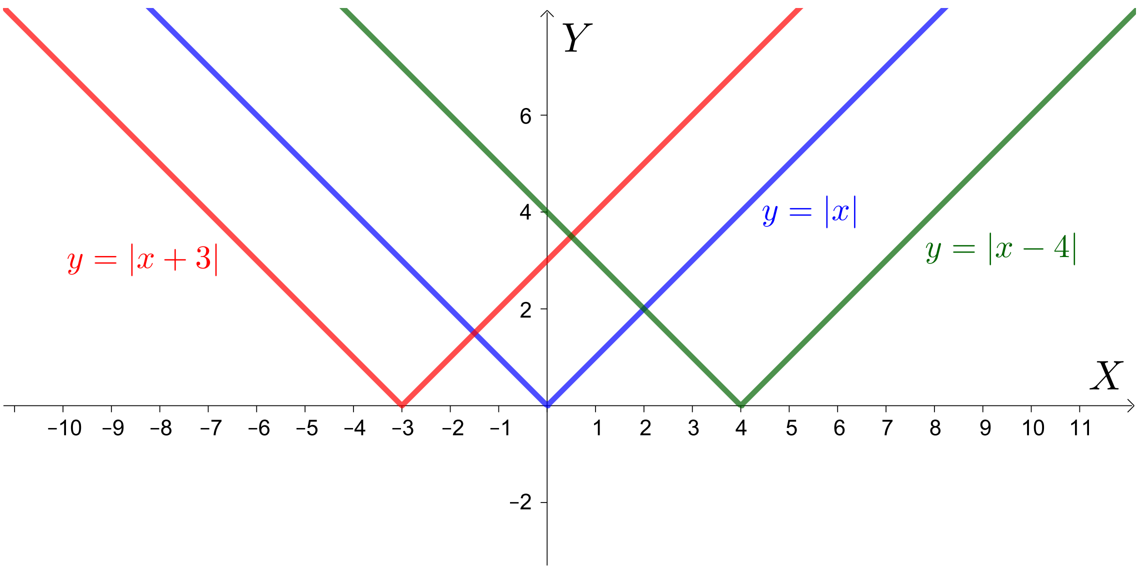
Ejemplo 5.5.1

Utilice la gráfica de la función $y = |x|$, para graficar las siguientes funciones:

1. $y = |x - 4|$
2. $y = |x + 3|$

Solución. *Utilizando la gráfica $y = |x|$, se obtienen las gráficas $y = |x - 4|$ y $y = |x + 3|$ transladando hacia derecha 4 unidades y 3 unidades a la izquierda, respectivamente.*

Figura 5.20: Gráficas de las ecuaciones $y = |x+3|$ y $y = |x-4|$.



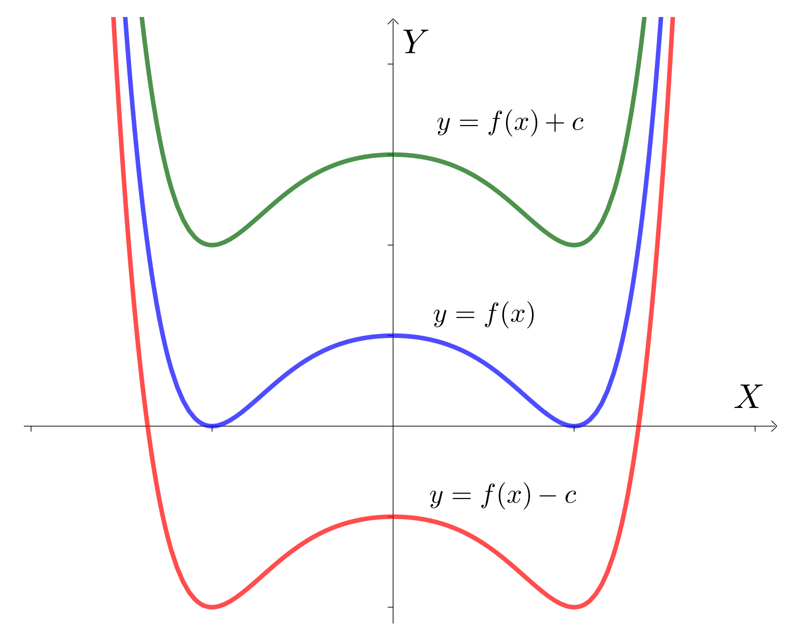
Traslación vertical

Supongamos que la gráfica de $y = f(x)$, se conoce. Si $c > 0$, es una constante entonces:

TV1) La gráfica de $y = f(x) - c$, es la traslación vertical de la gráfica $y = f(x)$, c unidades hacia abajo.

TV2) La gráfica de $y = f(x) + c$, es la traslación vertical de la gráfica $y = f(x)$, c unidades hacia arriba.

Figura 5.21: Graficas de las ecuaciones $y = f(x) + c$ y $y = f(x) - c$.



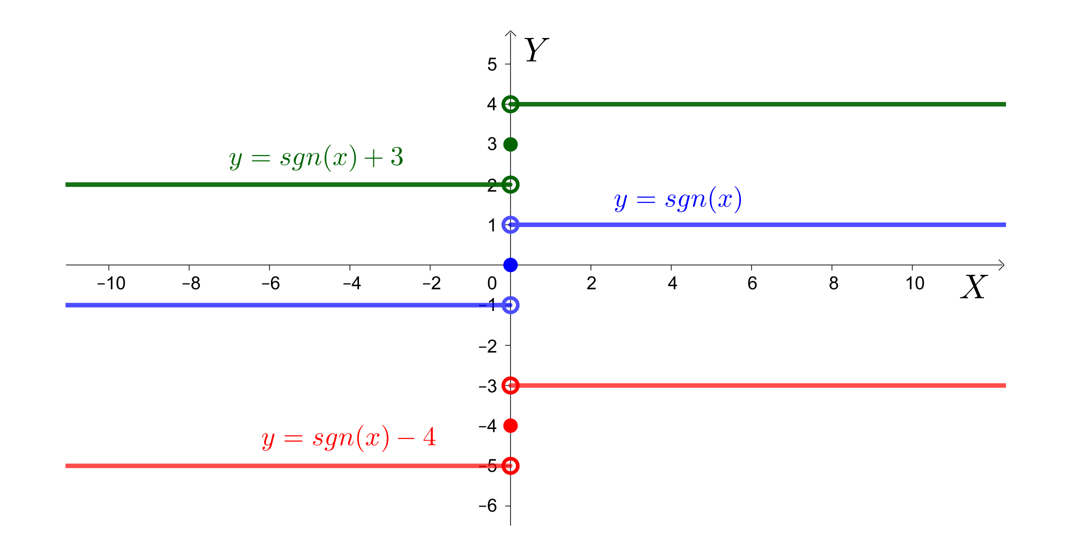
Ejemplo 5.5.2

Use la gráfica de sgn, para graficar las funciones:

1. $y = \operatorname{sgn}(x) + 3$
2. $y = \operatorname{sgn}(x) - 4$

Solución. *Transladando en forma vertical 3 unidades hacia arriba y 4 unidades hacia abajo se grafican las funciones.*

Figura 5.22: Graficas de las ecuaciones $y = \operatorname{sgn}(x) + 3$ y $y = \operatorname{sgn}(x) - 4$.



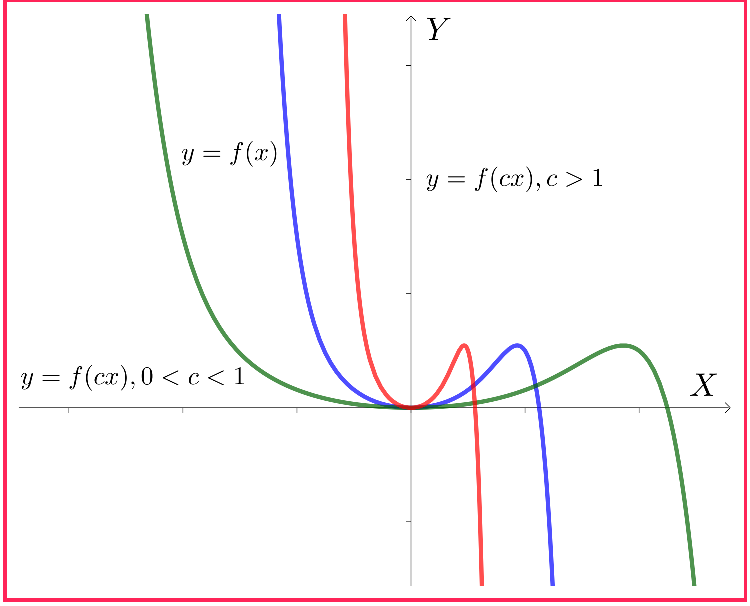
Contracción y alargamiento horizontal

Considere que la gráfica $y = f(x)$, es conocido y c un constante real.

CA1) Si $0 < c < 1$, entonces el gráfico de $y = f(cx)$, es alargamiento de la gráfica $y = f(x)$ en forma horizontal.

CA2) Si $c > 1$, entonces el gráfico de $y = f(cx)$, es contracción de la gráfica $y = f(x)$ en forma horizontal.

Figura 5.23: Graficas de las ecuaciones $y = f(cx)$, $c > 1$ y $y = f(cx)$, $0 < c < 1$.



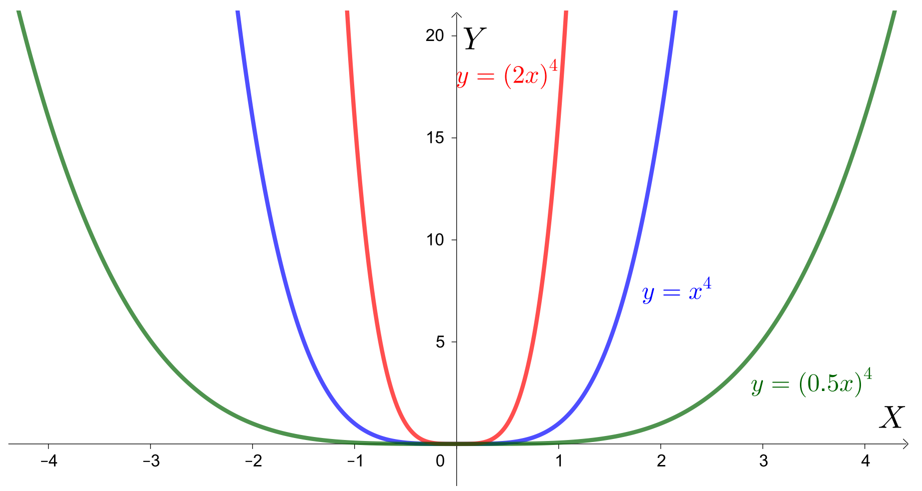
Ejemplo 5.5.3

Graficar $y = (0.5x)^4$ *y* $y = (2x)^4$.

Solución.

Contrayendo y alargando la gráfica $y = x^4$*, se obtiene los siguiente gráficos.*

Figura 5.24: Graficas de las ecuaciones $y = (0.5x)^4$ y $y = (2x)^4$.



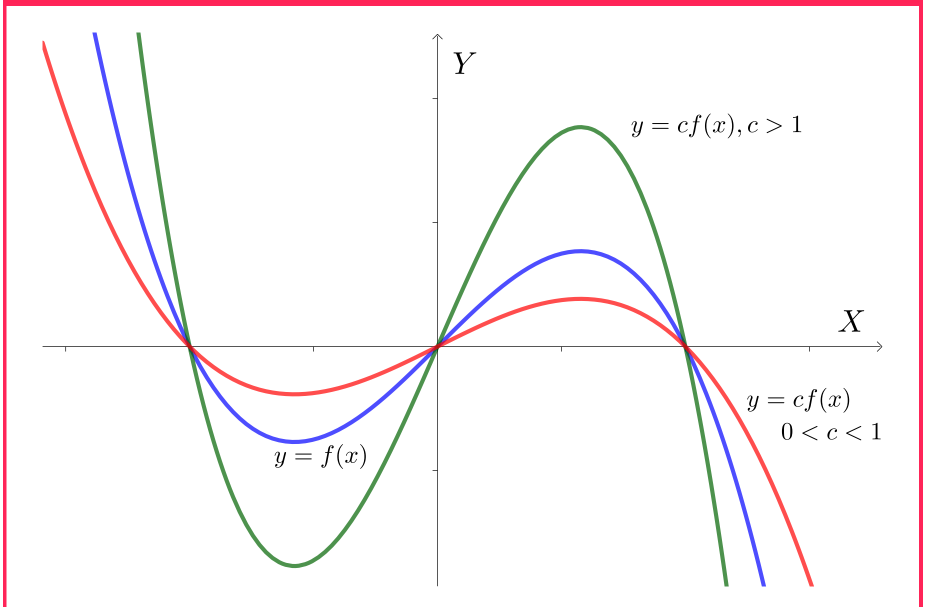
Contracción y alargamiento vertical

Considere la gráfica $y = f(x)$, conocido con una constante c real.

CA1) Si $0 < c < 1$, entonces el gráfico de $y = cf(x)$, es contracción de la gráfica $y = f(x)$ en forma vertical.

CA2) Si $c > 1$, entonces el gráfico de $y = cf(x)$, es alargamiento de la gráfica $y = f(x)$ en forma vertical.

Figura 5.25: Graficas de las ecuaciones $y = cf(x)$, $c > 1$ y $y = cf(x)$



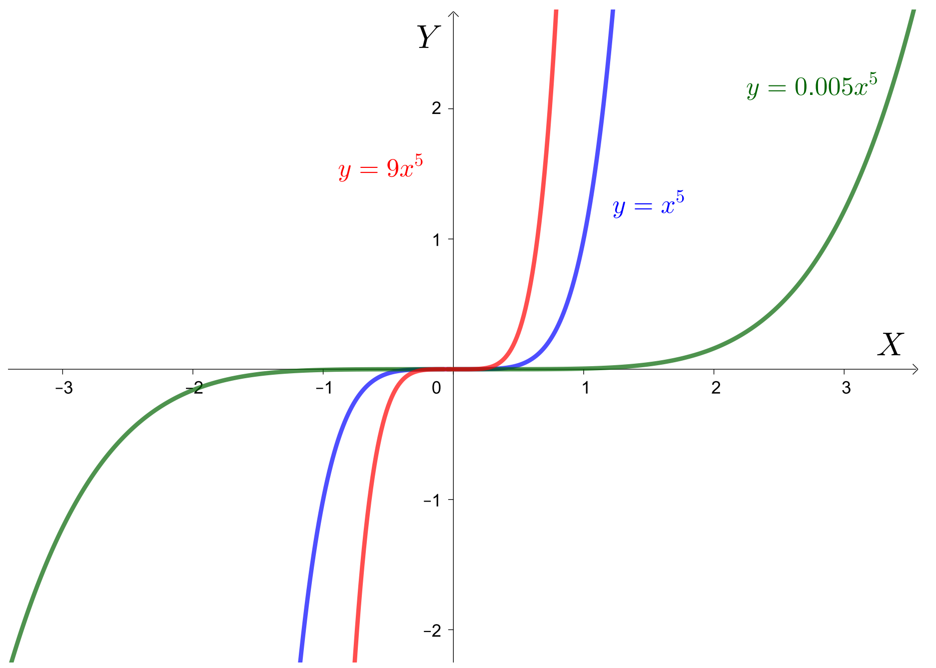
Ejemplo 5.5.4

Use la gráfica $y = x^5$, para graficar las siguientes funciones:

1. $y = 9x^5$
2. $y = 0.005x^5$

Solución. *Contrayendo y atrayendo en forma vertical, se obtienen las gráficas.*

Figura 5.26: Graficas de las ecuaciones $y = 9x^5$ y $y = 0.005x^5$.

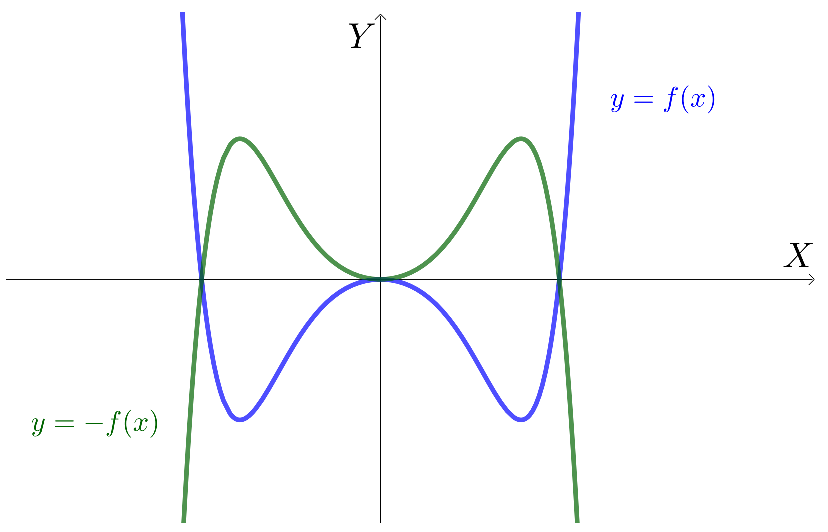


Gráficas que se reflejan

Considere que la gráfica $y = f(x)$, es conocido.

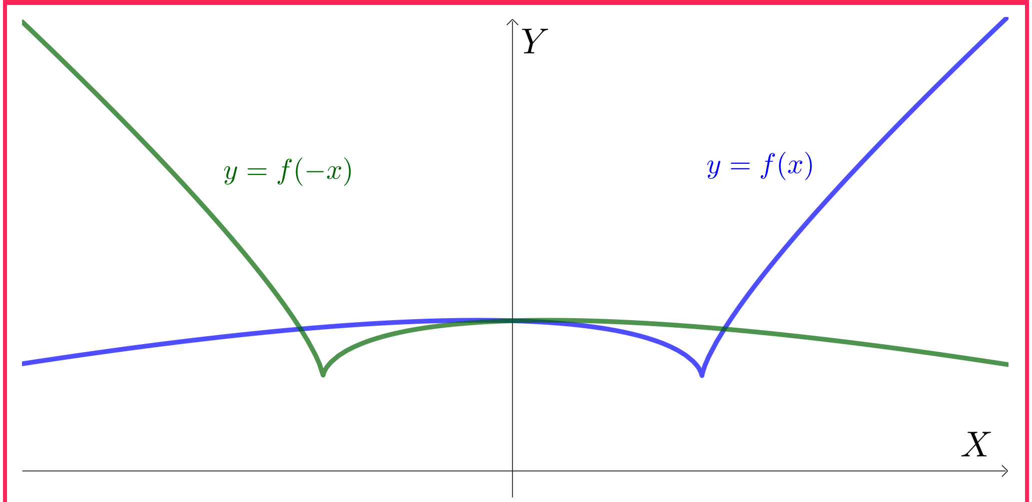
R1) El gráfico de $y = -f(x)$, es la reflexión del gráfico $y = f(x)$ sobre el eje X.

Figura 5.27: Gráficas de las ecuaciones $y = f(x)$ y $y = -f(x)$.



R2) El gráfico de $y = f(-x)$, es la reflexión del gráfico $y = f(x)$ sobre el eje Y.

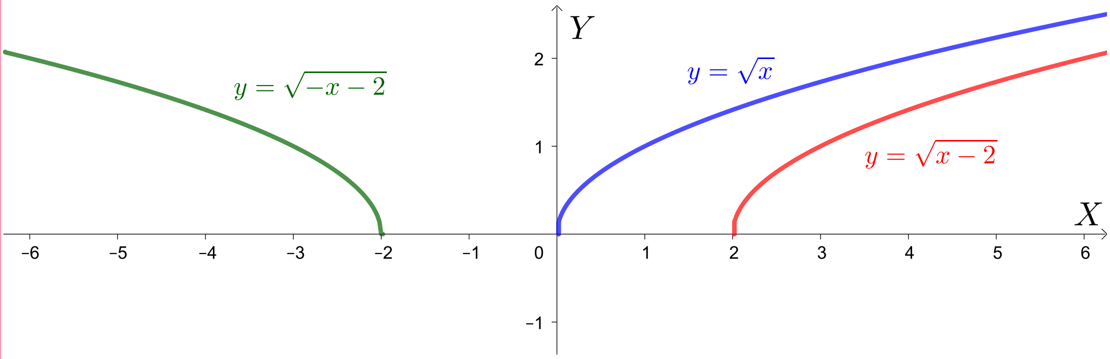
Figura 5.28: Gráficas de las ecuaciones $y = f(x)$ y $y = f(-x)$.



Ejemplo 5.5.5

Utilice la gráfica de $y = \sqrt{x}$, para graficar la función $y = \sqrt{-x-2}$.
Solución. *Para obtener el gráfico transladamos $y = \sqrt{x}$, 2 unidades hacia a la derecha y luego reflejamos sobre el eje Y.*

Figura 5.29: Gráfica de la función $y = \sqrt{-x-2}$.



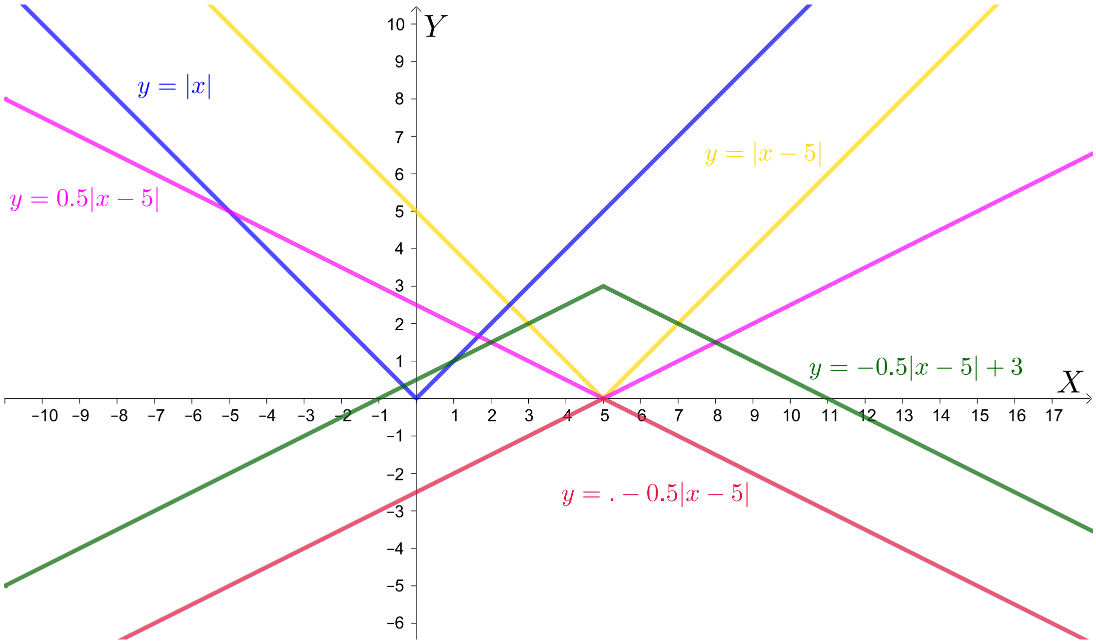
Ejemplo 5.5.6

Graficar la función $j(x) = -0.5|x-5| + 3$, a partir del gráfica $y = |x|$.

Solución.

Dibujando $y = |x|$, se traslada 5 unidades a la derecha en seguida, contrae de forma vertical y refleja sobre eje X y luego traslada hacia arriba 3 unidades. Así, se obtiene el gráfico deseado como puede verse en la figura 5.30.

Figura 5.30: Gráfica de la ecuación $y = -0.5|x-5| + 3$.



Ejemplo 5.5.7

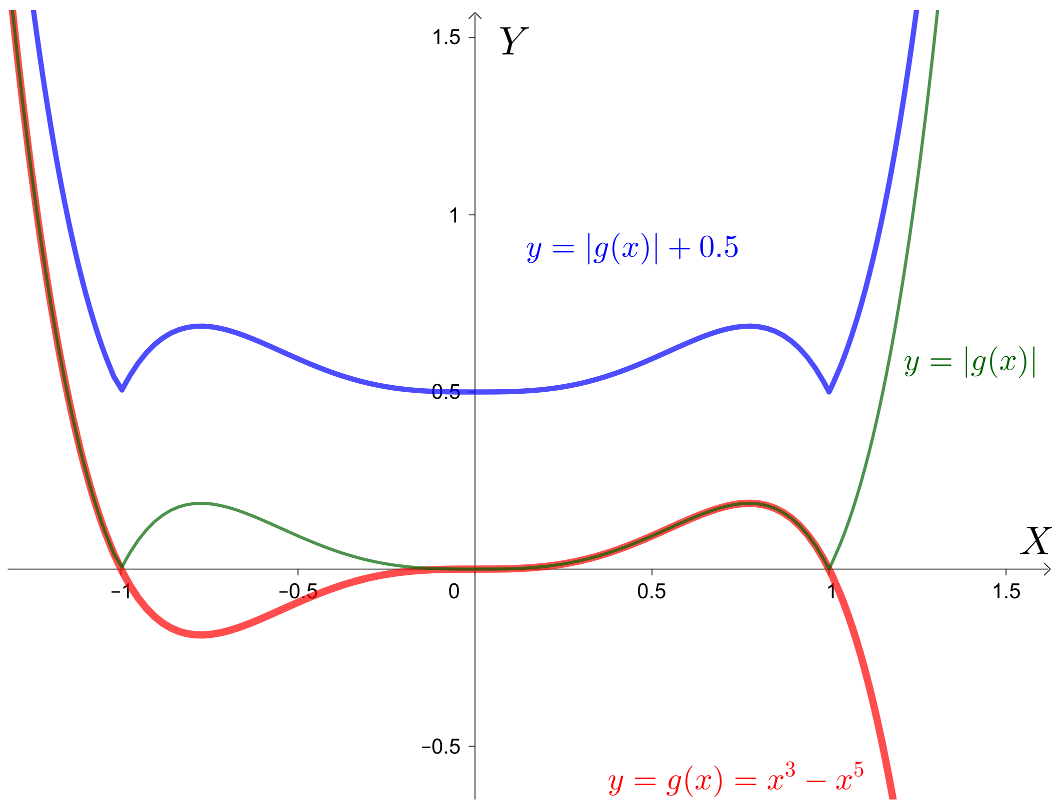
Gráfica la siguiente función:

$$y = |g(x)| + 0.5, \tag{5.34}$$

donde $g(x) = x^3 - x^5$.

Solución.

Figura 5.31: Gráfica de la ecuación $y = |g(x)| + 0.5$.



Definición 5.5.1

Si en una ecuación de 2 variable se obtiene exactamente una variable dependiente para cada variable independiente, entonces la ecuación específica una función. La gráfica de dicha ecuación es gráfica de la función especificada.

Ejemplo 5.5.8

Determine cuáles de las siguientes ecuaciones especifican funciones con la variable independiente x.

a) $3y - 9x^2 = 18$

b) $y^2 - x^2 = 11$

Solución.

a) *Despejando la variable y, se tiene*

$$y = 6 + 3x^2 \tag{5.35}$$

Se observa que hay un sola variable y para cada variable x, por lo tanto, la ecuación $3y - 9x^2 = 18$, específica una función.

b) *Despejando la variable y, se obtiene:*

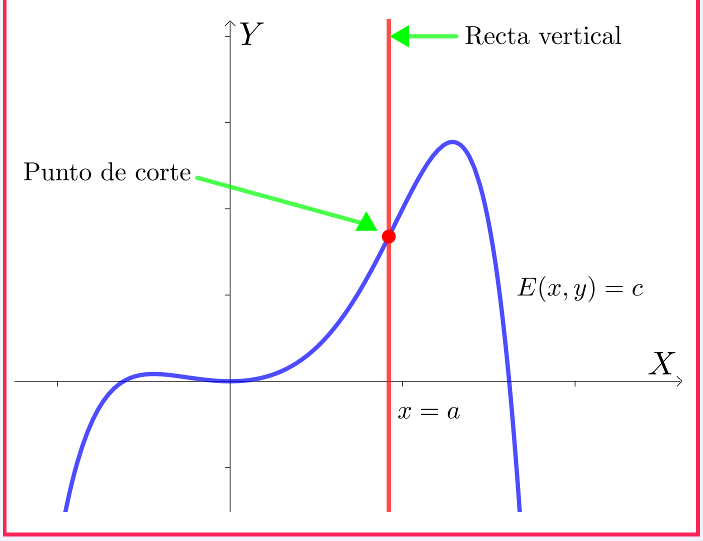
$$y^2 - x^2 = 11 \Longrightarrow y = \pm\sqrt{11 + x^2} \tag{5.36}$$

para cada x, existe dos valores de y, esto indica que la ecuación $y^2 - x^2 = 11$ no específica una función.

Teorema 5.5.1: Prueba de recta vertical para una función

Una ecuación específica una función si, cada recta vertical en plano cartesiano corta a lo máximo en un punto de la gráfica de la ecuación.

Figura 5.32: Gráfica de las ecuaciones $x = a$ y $E(x, y) = c$.

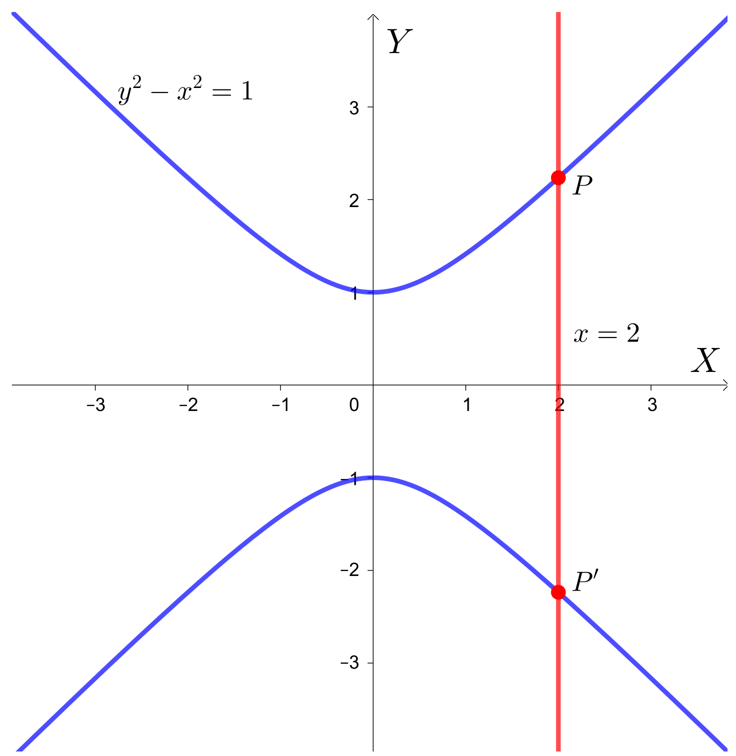


Ejemplo 5.5.9

La ecuación $y^2 - x^2 = 1$, ¿específica una función de la forma $y = y(x)$?

Solución.

Figura 5.33: Gráfica de $y^2 - x^2 = 1$.



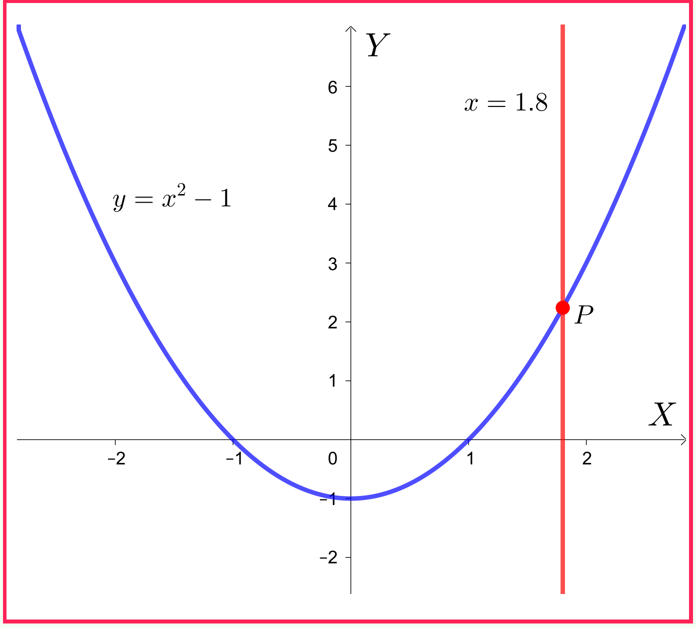
La respuesta es no, ya que usando la prueba de recta vertical al gráfico en $x = 2$, se observa que hay dos cortes en P y P'.

Ejemplo 5.5.10

La ecuación $y = x^2 - 1$, ¿específica una función $y = y(x)$?

Solución.

Figura 5.34: Gráfica de $y = x^2 - 1$.



Las rectas verticales corta siempre en un punto, como se puede verse en $x = 1.8$, en la figura 5.34. Por lo tanto, el gráfico de $y = x^2 - 1$, es una función.

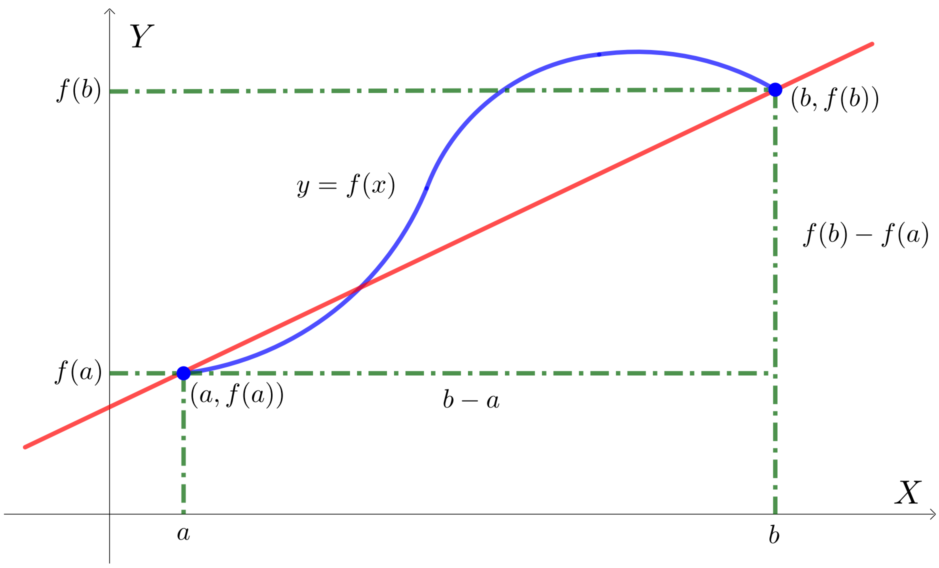
5.6. Rapidez de cambio promedio de una función

Considere la función $y = f(x)$, $x \in [a, b]$.

$$\text{Rapidez de cambio de promedio de } f \text{ en } [a,b] = \frac{\text{Cambio de } y}{\text{Cambio de } x} \tag{5.37}$$

$$= \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \tag{5.38}$$

Figura 5.35: Gráfica de cambio promedio.



Ejemplo 5.6.1

Encontrar la rapidez de cambio promedio de la función $f(x) = (x-4)^2$, *entre* $x = 2.5$ *y* $x = 8.5$.

Solución.

Como $f(8.5) = (8.5-4)^2 = 20.25$ *y* $f(2.5) = (2.5-4)^2 = 2.25$, *entonces*

$$\begin{aligned} \textit{Rapidez de cambio promedio} &= \frac{f(8.5) - f(2.5)}{8.5 - 2.5} \\ &= \frac{20.25 - 2.25}{6} \\ &= \frac{18}{6} \\ &= 3 \end{aligned}$$

5.7. Operaciones entre funciones

Definición 5.7.1

Sean $y = f(x)$ *y* $y = g(x)$ *funciones con dominios* $\mathrm{Dom}(f)$ *y* $\mathrm{Dom}(g)$, *respectivamente. Entonces:*

O1: Suma:

$$\boxed{(f+g)(x) = f(x) + g(x),} \tag{5.39}$$

donde $x \in \mathrm{Dom}(f+g) = \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g)$.

O2: Resta:

$$\boxed{(f-g)(x) = f(x) - g(x),} \tag{5.40}$$

donde $x \in \mathrm{Dom}(f-g) = \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g)$.

O3: Producto:

$$\boxed{(fg)(x) = f(x)g(x),} \tag{5.41}$$

donde $x \in \mathrm{Dom}(fg) = \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g)$.

O4: División:

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)},} \tag{5.42}$$

donde $x \in \mathrm{Dom}\left(\frac{f}{g}\right) = \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g) - \{x : g(x) = 0\}$.

Ejemplo 5.7.1

Sean $f(x) = \dfrac{x+2}{x-1}$ *y* $g(x) = \sqrt{9-x^2}$. *Encuentre* $f+g$, $f-g$, fg, $\dfrac{f}{g}$ *y sus dominios.*

Solución.

El dominio de f *es* $\mathbb{R} - \{1\}$ *y para el dominio de* g, $9 - x^2 \geq 0$ *si y sólo si* $(x-3)(x+3) \leq 0$, *o sea,* $x \in [-3, 3]$. *De esto,* $\mathrm{Dom}(g) = [-3, 3]$.

La suma *de* f *y* g *está definida por:*

$$(f+g)(x) = \frac{x+2}{x-1} + \sqrt{9-x^2},$$

donde $\mathrm{Dom}(f+g) = (\mathbb{R} - \{1\}) \cap [-3, 3] = [-3, 1\rangle \cup \langle 1, 3]$.

La resta *de* f *y* g *está definida por:*

$$(f-g)(x) = \frac{x+2}{x-1} - \sqrt{9-x^2},$$

donde $\mathrm{Dom}(f-g) = (\mathbb{R} - \{1\}) \cap [-3, 3] = [-3, 1\rangle \cup \langle 1, 3]$.

El producto *de* f *y* g *está definida por:*

$$(fg)(x) = \frac{x+2}{x-1}\sqrt{9-x^2} = \frac{(x+2)\sqrt{9-x^2}}{x-1},$$

donde $\mathrm{Dom}(fg) = (\mathbb{R} - \{1\}) \cap [-3, 3] = [-3, 1\rangle \cup \langle 1, 3]$.

La división *de* f *y* g *está definida por:*

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\dfrac{x+2}{x-1}}{\sqrt{9-x^2}} = \frac{(x+2)}{\sqrt{9-x^2}(x-1)},$$

donde $\mathrm{Dom}(fg) = [-3, 1\rangle \cup \langle 1, 3] - \{x : \sqrt{9-x^2}\} = \langle -3, 1\rangle \cup \langle 1, 3\rangle$.

Ejemplo 5.7.2

Consideremos las funciones

$$h(x) = \left[\!\left[\frac{x^2+1}{x-3}\right]\!\right], s(x) = \sqrt{[\![x]\!]^2 - 9}$$

Calcular dominio de $h+s$, hs *y* $\dfrac{h}{s}$, *sus operaciones.*

Solución.

Como h, *está definido para todo* $x \neq 3$ *entonces* $\mathrm{Dom}(h) = \mathbb{R} - \{3\}$. *Además, los valores de* x *que satisface* $[\![x]\!]^2 - 9 \geq 0$, *conforma* $\mathrm{Dom}(s)$ *y para determinar que valores toma* x *debemos resolver:*

$$\begin{aligned}
[\![x]\!]^2 - 9 &\geq 0 \\
([\![x]\!] - 3)([\![x]\!] + 3) &\geq 0 \Longrightarrow [\![x]\!] \geq 3 \vee [\![x]\!] \leq -3 \\
&\Longrightarrow x \geq 3 \vee x < -2 \\
&\Longrightarrow x \in [3, +\infty\rangle \cup \langle -\infty, -2\rangle
\end{aligned}$$

de donde, $\mathrm{Dom}(s) = \langle -\infty, -2\rangle \cup [3, +\infty\rangle$.

La suma *de* h *y* s, *está definida por:*

$$(h+s)(x) = \left[\!\left[\frac{x^2+1}{x-3}\right]\!\right] + \sqrt{[\![x]\!]^2 - 9},$$

con

$$\begin{aligned}
\mathrm{Dom}(h+s) &= (\mathbb{R} - \{3\}) \cap (\langle -\infty, -2\rangle \cup [3, +\infty\rangle) \\
&= \langle -\infty, -2\rangle \cup \langle 3, +\infty\rangle
\end{aligned}$$

El producto *de* h *y* s, *está definida por:*

$$(hs)(x) = \left[\!\left[\frac{x^2+1}{x-3}\right]\!\right] \sqrt{[\![x]\!]^2 - 9},$$

con

$$\begin{aligned}
\mathrm{Dom}(hs) &= (\mathbb{R} - \{3\}) \cap (\langle -\infty, -2\rangle \cup [3, +\infty\rangle) \\
&= \langle -\infty, -2\rangle \cup \langle 3, +\infty\rangle
\end{aligned}$$

La división *de* h *y* s, *está definida por:*

$$\left(\frac{h}{s}\right)(x) = \frac{\left[\!\left[\dfrac{x^2+1}{x-3}\right]\!\right]}{\sqrt{[\![x]\!]^2 - 9}},$$

para dominio de $\dfrac{h}{s}$, *primero determinemos los valores* x *tal que* $s(x) = 0$, *es decir,*

$$\begin{aligned}
s(x) = 0 &\Longrightarrow \sqrt{[\![x]\!]^2 - 9} = 0 \\
&\Longrightarrow [\![x]\!]^2 = 9 \\
&\Longrightarrow [\![x]\!] = \pm 3 \\
&\Longrightarrow x \in [3, 4\rangle \cup [-3, -2\rangle
\end{aligned}$$

En seguida,

$$\begin{aligned}\operatorname{Dom}\left(\frac{h}{s}\right) &= (\mathbb{R}-\{3\})\cap(\langle-\infty,-2\rangle\cup[3,+\infty\rangle)-\{x\in\mathbb{R}/g(x)=0\}\\ &= \langle-\infty,-2\rangle\cup\langle3,+\infty\rangle-([3,4\rangle\cup[-3,-2\rangle)\\ &= \langle-\infty,-3\rangle\cup[4,+\infty\rangle\end{aligned}$$

5.8. Composición de funciones

Sean $y=f(x)$ y $z=g(y)$, funciones. La compuesta de g y f, denotado por $g\circ f$, es definida por:

$$\boxed{z=(g\circ f)(x)=g(f(x)),} \tag{5.43}$$

con dominio,

$$\boxed{\operatorname{Dom}(g\circ f)=\{x\in\operatorname{Dom}(f):f(x)\in\operatorname{Dom}(g)\}.} \tag{5.44}$$

Ejemplo 5.8.1

Sean $f(x)=x^2-2$ y $g(x)=\sqrt{x-1}$. Determine $f\circ g$ y $g\circ f$ y sus dominios.
Solución. *Las composiciones:*

$$\begin{aligned}(f\circ g)(x) &= f(g(x))\\ &= f\left(\sqrt{x-1}\right)\\ &= \left(\sqrt{x-1}\right)^2-2\\ &= x-1-2\\ &= x-3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(g\circ f) &= g\left(x^2-2\right)\\ &= \sqrt{x^2-2-1}\\ &= \sqrt{x^2-3}\end{aligned}$$

Como los dominios f y g son $\operatorname{Dom}(f)=\mathbb{R}$ y $\operatorname{Dom}(g)=[1,+\infty\rangle$, entonces:

$$\begin{aligned}\operatorname{Dom}(f\circ g) &= \{x\in\operatorname{Dom}(g):g(x)\in\operatorname{Dom}(f)\}\\ &= \{x\in[1,+\infty\rangle:\sqrt{x-1}\in\mathbb{R}\}\\ &= [1,+\infty\rangle\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Dom}(g\circ f) &= \{x\in \mathrm{Dom}(f) : f(x)\in \mathrm{Dom}(g)\}\\
&= \{x\in\mathbb{R} : x^2-2\in[1,+\infty\rangle\}\\
&= \{x\in\mathbb{R} : x^2-2\geq 1\}\\
&= \{x\in\mathbb{R} : (x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})\geq 0\}\\
&= \{x\in\mathbb{R} : x\in\langle-\infty,-\sqrt{3}]\cup[\sqrt{3},+\infty\rangle\}\\
&= \langle-\infty,-\sqrt{3}]\cup[\sqrt{3},+\infty\rangle
\end{aligned}$$

Ejemplo 5.8.2

Determine $g\circ f$ y $f\circ g$, y sus dominios, donde $f(x)=\sqrt{x-2}$ y $g(x)=\dfrac{x+2}{x^2-4}$.

Solución.

Como $\mathrm{Dom}(f)=[2,+\infty\rangle$ *y* $\mathrm{Dom}(g)=\mathbb{R}-\{-2,2\}$ *entonces*

$$\begin{aligned}
\mathrm{Dom}(g\circ f) &= \{x\in \mathrm{Dom}(f) : f(x)\in \mathrm{Dom}(g)\}\\
&= \{x\in[2,+\infty\rangle : \sqrt{x-2}\in\mathbb{R}-\{-2,2\}\}\\
&= [2,6\rangle\cup\langle 6,+\infty\rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Dom}(f\circ g) &= \{x\in \mathrm{Dom}(g) : g(x)\in \mathrm{Dom}(f)\}\\
&= \{x\in\mathbb{R}-\{-2,2\} : \frac{x+2}{x^2-4}\in[2,+\infty\rangle\}\\
&= \{x\in\mathbb{R}-\{-2,2\} : \frac{2x^2-x-10}{(x-2)(x+2)}\leq 0\}\\
&= \{x\in\mathbb{R}-\{-2,2\} : \frac{(2x-5)(x+2)}{(x-2)(x+2)}\leq 0\}\\
&= \{x\in\mathbb{R}-\{-2,2\} : \frac{2x-5}{x-2}\leq 0, x\neq -2\}\\
&= \langle 2,\frac{5}{2}]
\end{aligned}$$

Las reglas correspondencia:

$$\begin{aligned}
(g\circ f)(x) &= g\left(\sqrt{x-2}\right)\\
&= \frac{\sqrt{x-2}+2}{x-6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(f\circ g)(x) &= f\left(\frac{x+2}{x^2-4}\right)\\
&= \sqrt{\frac{x+2}{x^2-4}-2}\\
&= \sqrt{\frac{-2x^2+x+10}{x^2-4}}\\
&= \sqrt{\frac{(5-2x)(x+2)}{(x-2)(x+2)}}\\
&= \sqrt{\frac{5-2x}{x-2}}
\end{aligned}$$

Ejemplo 5.8.3

Considere las siguientes funciones $f(x) = \begin{cases} -x+2 & si \quad x \in \langle -\infty, -1] \\ x^2+1 & si \quad x \in \langle -1, 1\rangle \\ x-2 & si \quad x \in [1, +\infty\rangle \end{cases}$ *y* $g(x) = \begin{cases} -|x-2| & si \quad x \in \langle -\infty, 0\rangle \\ \sqrt{x} & si \quad x \in [0, +\infty\rangle \end{cases}$ *Hallar* $f \circ g$ *y* $g \circ f$ *y sus dominios.*

Solución. *Reescribimos:*

$$\begin{aligned} &f_1(x) = -x+2, \text{Dom}(f_1) = \langle -\infty, -1] \\ &f_2(x) = x^2+1, \text{Dom}(f_2) = \langle -1, 1\rangle \\ &f_3(x) = x-2, \text{Dom}(f_3) = [1, +\infty\rangle \\ &g_1(x) = -|x-2|, \text{Dom}(g_1) = \langle -\infty, 0\rangle \\ &g_2(x) = \sqrt{x}, \text{Dom}(g_2) = [0, +\infty\rangle \end{aligned}$$

Determinemos los dominios de las composiciones de f_i *y* g_j*, para* $i = 1, 2, 3$ *y* $j = 1, 2$*:*

$$\begin{aligned} \text{Dom}(f_1 \circ g_1) &= \{x \in \text{Dom}(g_1) : g_1(x) \in \text{Dom}(f_1)\} \\ &= \{x \in \langle -\infty, 0\rangle : -|x-2| \in \langle -\infty, -1]\} \\ &= \{x \in \langle -\infty, 0\rangle : |x-2| \geq 1\} \\ &= \{x \in \langle -\infty, 0\rangle : x \geq 3 \vee x \leq 1\} \\ &= \langle -\infty, 0\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Dom}(f_1 \circ g_2) &= \{x \in \text{Dom}(g_2) : g_2(x) \in \text{Dom}(f_1)\} \\ &= \{x \in [0, +\infty\rangle : \sqrt{x} \in \langle -\infty, -1]\} \\ &= \{x \in [0, +\infty\rangle : \sqrt{x} \leq -1\} \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Dom}(f_2 \circ g_1) &= \{x \in \text{Dom}(g_1) : g_1(x) \in \text{Dom}(f_2)\} \\ &= \{x \in \langle -\infty, 0\rangle : -|x-2| \in \langle -1, 1\rangle\} \\ &= \{x \in \langle -\infty, 0\rangle : |x-2| \in \langle -1, 1\rangle\} \\ &= \{x \in \langle -\infty, 0\rangle : x \in \langle 1, 3\rangle\} \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Dom}(f_2 \circ g_2) &= \{x \in \text{Dom}(g_2) : g_2(x) \in \text{Dom}(f_2)\} \\ &= \{x \in [0, +\infty\rangle : \sqrt{x} \in \langle -1, 1\rangle\} \\ &= [0, 1\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Dom}(f_3 \circ g_1) &= \{x \in \text{Dom}(g_1) : g_1(x) \in \text{Dom}(f_3)\} \\ &= \{x \in \langle -\infty, 0\rangle : -|x-2| \in [1, +\infty\rangle\} \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Dom}(f_3\circ g_2) &= \{x\in \mathrm{Dom}(g_2) : g_2(x)\in \mathrm{Dom}(f_3)\}\\ &= \{x\in [0,+\infty\rangle : \sqrt{x}\in [1,+\infty\rangle\}\\ &= [1,+\infty\rangle\end{aligned}$$

Las composiciones son:

$$\begin{aligned}(f_1\circ g_1)(x) &= f_1(-|x-2|) = |x-2|+2\\ (f_2\circ g_2)(x) &= f_2(\sqrt{x}) = x+1\\ (f_3\circ g_2)(x) &= f_3(\sqrt{x}) = \sqrt{x}-2\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$(f\circ g)(x) = \begin{cases} |x-2|+2 & \textit{si} \quad x\in\langle -\infty,0\rangle,\\ x+1 & \textit{si} \quad x\in[0,1\rangle,\\ \sqrt{x}-2 & \textit{si} \quad x\in[1,+\infty\rangle.\end{cases}$$

Por otro lado, para $g\circ f$:

$$\begin{aligned}\mathrm{Dom}(g_1\circ f_1) &= \{x\in \mathrm{Dom}(f_1) : f_1(x)\in \mathrm{Dom}(g_1)\}\\ &= \{x\in \langle -\infty,-1] : -x+2\in \langle -\infty,0\rangle\}\\ &= \{x\in \langle -\infty,-1] : x>2\}\\ &= \emptyset\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Dom}(g_1\circ f_2) &= \{x\in \mathrm{Dom}(f_2) : f_2(x)\in \mathrm{Dom}(g_1)\}\\ &= \{x\in \langle -1,1\rangle : x^2+1\in \langle -\infty,0\rangle\}\\ &= \emptyset\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Dom}(g_1\circ f_3) &= \{x\in \mathrm{Dom}(f_3) : f_3(x)\in \mathrm{Dom}(g_1)\}\\ &= \{x\in [1,+\infty\rangle : x-2\in \langle -\infty,0\rangle\}\\ &= [1,2\rangle\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Dom}(g_2\circ f_1) &= \{x\in \mathrm{Dom}(f_1) : f_1(x)\in \mathrm{Dom}(g_2)\}\\ &= \{x\in \langle -\infty,-1] : -x+2\in [0,+\infty\rangle\}\\ &= \langle -\infty,-1]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Dom}(g_2\circ f_2) &= \{x\in \mathrm{Dom}(f_2) : f_2(x)\in \mathrm{Dom}(g_2)\}\\ &= \{x\in \langle -1,1\rangle : x^2+1\in [0,+\infty\rangle\}\\ &= \langle -1,1\rangle\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Dom}(g_2\circ f_3) &= \{x\in \mathrm{Dom}(f_3) : f_3(x)\in \mathrm{Dom}(g_2)\}\\ &= \{x\in [1,+\infty\rangle : x-2\in [0,+\infty\rangle\}\\ &= [2,+\infty\rangle\end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned}
(g_1 \circ f_3)(x) &= g_1(x-2) = -|x-2-2| = -|x-4| \\
(g_2 \circ f_1)(x) &= g_2(-x+2) = \sqrt{-x+2} \\
(g_2 \circ f_2)(x) &= g_2(x^2+1) = \sqrt{x^2+1} \\
(g_2 \circ f_3)(x) &= g_2(x-2) = \sqrt{x-2}
\end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} -|x-4| & si \quad x \in [1, 2\rangle, \\ \sqrt{-x+2} & si \quad x \in \langle -\infty, -1], \\ \sqrt{x^2+1} & si \quad x \in \langle -1, 1\rangle, \\ \sqrt{x-2} & si \quad x \in [2, +\infty\rangle. \end{cases}$$

5.9. Inversas de funciones

Definición 5.9.1

Una función f es inyectiva si: para todos $x_1, x_2 \in \mathrm{Dom}(f)$,

$$\boxed{f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2} \tag{5.45}$$

o equivalentemente

$$\boxed{x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)} \tag{5.46}$$

Una función inyectiva es denominado también uno a uno.

Ejemplo 5.9.1

Sean las funciones

$$f = \{(-7,1), (-6,0), (-3,-1), (-2,2)\} \tag{5.47}$$
$$g = \{(-2,16), (0,12), (-3,16), (1,10), (2,13)\} \tag{5.48}$$

¿Las funciones f y g son inyectivas?
Solución. *La función f es inyectiva ya que, para todo $x_1, x_2 \in \mathrm{Dom}(f) = \{-7, -6, -3, -2\}$, con $x_1 \neq x_2$, se cumple la definición 5.46.*
La proposición $g(-2) \neq g(-3)$, es falsa pues, $g(-2) = g(-3) = 16$, luego

$$\underbrace{\underbrace{-2 \neq -3}_{V} \Longrightarrow \underbrace{g(-2) \neq g(-3)}_{F}}_{F}$$

Consecuentemente, g no es inyectiva.

Teorema 5.9.1: Prueba horizontal para inyectiva

Una función es inyectiva si, toda recta horizontal corta a lo más en un punto.

Ejemplo 5.9.2

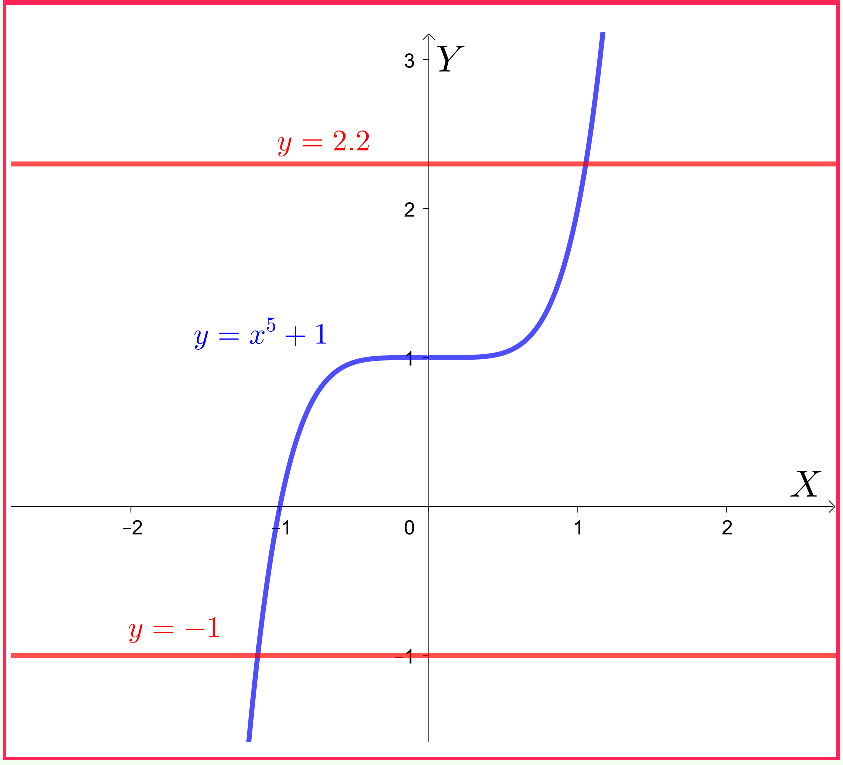
¿ La función $k(x) = x^5 + 1$, es inyectiva?

Solución. *Sean x_1 y x_2 dos números reales. Entonces*

$$k(x_1) = k(x_2) \Longrightarrow x_1^5 + \cancel{1} = x_2^5 + \cancel{1} \quad (5.49)$$
$$\Longleftrightarrow x_1^5 = x_2^5 \quad (5.50)$$
$$\Longleftrightarrow x_1 = x_2 \quad (5.51)$$

Por lo tanto, $k(x) = x^5 + 1$ es inyectiva.

Figura 5.36: Graficas de $y = x^5 + 1$, $y = 2.2$ y $y = -1$.



Usando la prueba para inyectiva en $k(x)$, en la figura 5.36, se ve toda recta horizontal corta en un punto a $y = x^5 + 1$, por consiguiente, k es inyectiva.

Ejemplo 5.9.3

¿La función $g(x) = x^3 - x$, es inyectiva?

Solución. *Para $x_1 = -1$ y $x_2 = 1$, tenemos*

$$g(-1) = (-1)^3 - (-1) = 0$$
$$g(1) = (1)^3 - 1 = 0$$

Determinemos la tabla de verdad de la proposición:

$$\underbrace{\underbrace{g(-1) = g(1)}_{V} \Longrightarrow \underbrace{-1 = 1}_{F}}_{F}$$

Esta proposición es falsa, por lo cual g no satisface la definición 5.45. Por consiguiente, g no es inyectiva.

Ejemplo 5.9.4

Demostrar que la función $h(x) = -2x + 6$, es inyectiva.
Solución. *Sean x_1 y x_2 dos números reales. Entonces*

$$h(x_1) = h(x_2) \Longrightarrow -2x_1 + \cancel{6} = -2x_2 + \cancel{6} \tag{5.52}$$
$$\Longrightarrow -2x_1 = -2x_2 \tag{5.53}$$
$$\Longrightarrow x_1 = x_2 \tag{5.54}$$

Por consiguiente, h es inyectiva.

Definición 5.9.2

Una función $f : X \longrightarrow Y$, es sobreyectiva si satisface la condición siguiente:

$$\boxed{\forall y \in Y, \exists x \in X, f(x) = y.} \tag{5.55}$$

o equivale a $\text{Rang}(f) = Y$.

Ejemplo 5.9.5

Sea $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, función dada por $g(x) = \dfrac{2x^3}{x^3+4}$, ¿$g$ es sobreyectiva?
Solución. *Considere la ecuación*

$$g(x) = y \tag{5.56}$$

Verifiquemos si es posible despejar la variable x,

$$\begin{aligned} \frac{2x^3}{x^3+4} &= y \\ 2x^3 &= y(x^3+4) \\ 2x^3 - yx^3 &= 4y \\ x^3(2-y) &= 4y \\ x^3 &= \frac{4y}{2-y}, y \neq 2 \\ x &= \left(\frac{4y}{2-y}\right)^{1/3}, y \neq 2 \end{aligned}$$

Para $y = 2$, tenemos

$$\begin{aligned}\frac{2x^3}{x^3+4} &= 2\\ 2x^3 &= 2(x^3+4)\\ 2x^3 &= 2x^3+8\\ 0 &= 8 \text{ ¡Absurdo!}\end{aligned}$$

De ahí, 2 no es imagen de ningún valor mediante g, y por lo tanto, g no es sobreyectiva.

Sin embargo, si consideraramos $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} - \{2\}$ con $h(x) = \dfrac{2x^3}{x^3+4}$, entonces para cada $y \in \mathbb{R} - \{2\}$, existe $x = \left(\dfrac{4y}{2-y}\right)^{1/3}$ tal que

$$h(x) = h\left[\left(\frac{4y}{2-y}\right)^{1/3}\right] = \frac{2\left[\left(\frac{4y}{2-y}\right)^{1/3}\right]^3}{\left[\left(\frac{4y}{2-y}\right)^{1/3}\right]^3+4} = y.$$

Ésta función es sobreyectiva.
Las funciones g y h, son diferentes apesar que tienen los mismos dominios y reglas de correspondencia.

Ejemplo 5.9.6

Considere $q : \mathbb{R} \longrightarrow [-2, 0.5\rangle$, dada por $q(x) = \dfrac{x^4-16}{2x^4+8}$, ¿$q$ es sobreyectiva?

Solución. *Reescribimos q de la forma:*

$$\frac{x^4-16}{2x^4+8} = \frac{x^4+4-20}{2(x^4+4)} = \frac{1}{2} - \frac{10}{x^4+4}$$

Determinemos el rango de q:

$$\begin{aligned} x \in \mathbb{R} &\Longrightarrow x^4 \geq 0\\ &\Longrightarrow x^4+4 \geq 4\\ &\Longrightarrow \frac{10}{x^4+4} \leq \frac{10}{4}\\ &\Longrightarrow -\frac{10}{x^4+4} \geq -\frac{5}{2}\\ &\Longrightarrow \frac{1}{2} - \frac{10}{x^4+4} \geq \frac{1}{2} - \frac{5}{2} = -2\end{aligned}$$

Además, $\dfrac{1}{2} - \dfrac{10}{x^4+4} < \dfrac{1}{2} = 0.5$. Luego, $q(x) \in [-2, 0.5\rangle$, para todo $x \in \mathbb{R}$, o sea, $\mathrm{Rang}(q) = [-2, 0.5\rangle$. Por lo tanto, q es sobreyectiva.

Definición 5.9.3

Una función f es biyectiva si es inyectiva y sobreyectiva.

Definición 5.9.4

Sea f una función inyectiva con dominio X y rango Y. La función inversa de f es denotado por f^{-1} y definida por

$$f^{-1}(y) = x \Longleftrightarrow f(x) = y \tag{5.57}$$

para cada $y \in Y$.

Teorema 5.9.2

Sea f una función con dominio X y rango Y. La función g es inversa de f si y solo si

$$f^{-1}(f(x)) = x, \text{ para todo } x \in X \text{ y} \tag{5.58}$$

$$f\left(f^{-1}(y)\right) = y, \text{ para todo } y \in Y. \tag{5.59}$$

Si g es inversa de f, entonces $g = f^{-1}$.
Demostración. *Queda como ejercicio para el lector.*

Ejemplo 5.9.7

¿Las funciones $f(x) = (x-1)^7$ y $g(x) = x^{1/7} + 1$ son inversas entre sí?
Solución.
La respuesta es SI, ya que

$$f(g(x)) = f(x^{1/7} + 1) = (x^{1/7} + 1 - 1)^7 = x,$$
$$g(f(x)) = g((x-1)^7) = [(x-1)^{1/7}]^7 + 1 = x,$$

para todo $x \in \mathrm{Dom}(f) = \mathrm{Dom}(g)$.

Ejemplo 5.9.8

Hallar la función inversa de $p(x) = -5x + 20$.
Solución.
Escribimos

$$y = -5x + 20$$

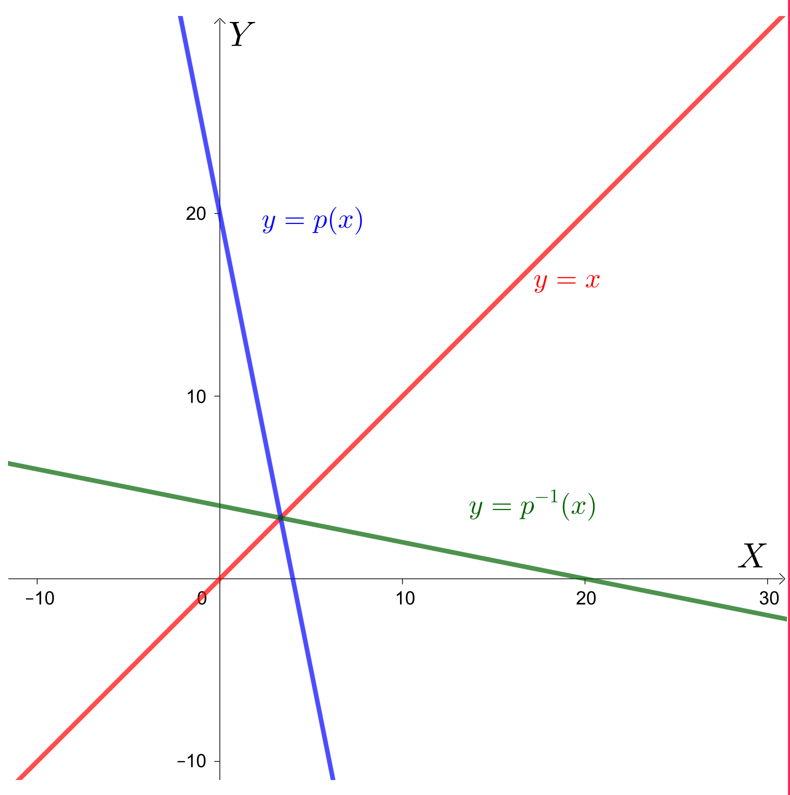
Despejemos la variable x de ecuación anterior:

$$y = -5x + 20 \tag{5.60}$$
$$y - 20 = -5x \tag{5.61}$$
$$\frac{y-20}{-5} = x \tag{5.62}$$
$$\frac{20-y}{5} = x \tag{5.63}$$

Intercambiando x y y, en esta última ecuación obtenemos:

$$p^{-1}(x) = \frac{20 - x}{5}$$

Figura 5.37: Gráfica de $y = p(x)$ y $y = p^{-1}(x)$.



Ejemplo 5.9.9

Encontrar la inversa de $t(x) = (3 - x^3)^{1/5}$.
Solución. *Escribimos*

$$y = (3 - x^3)^{1/5}$$

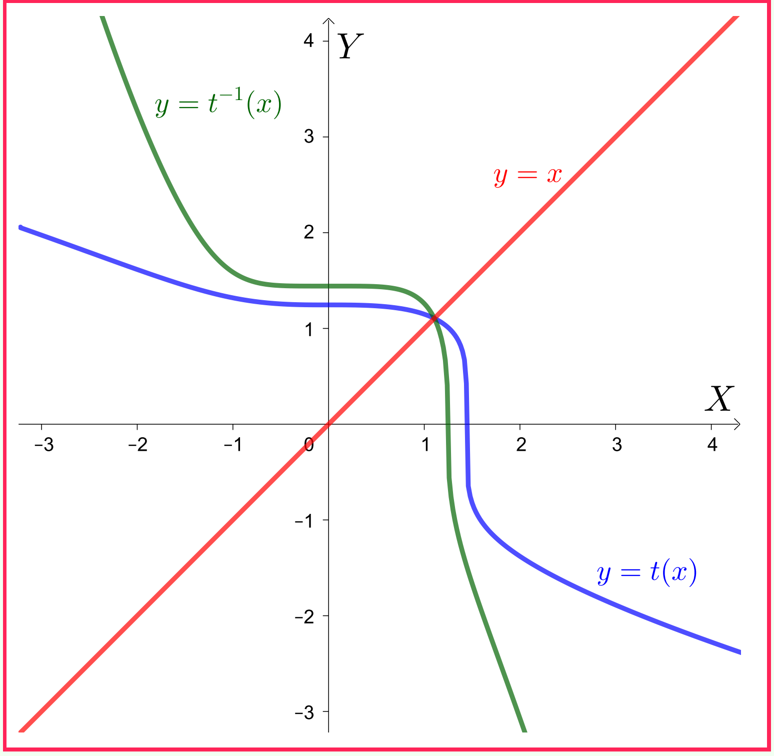
Despejemos la variable x:

$$\begin{aligned} y &= (3 - x^3)^{1/5} \\ y^5 &= 3 - x^3 \\ y^5 - 3 &= -x^3 \\ 3 - y^5 &= x^3 \\ (3 - y^5)^{1/3} &= x \end{aligned}$$

Intercambiando x y y en la última ecuación obtenida obtenemos

$$t^{-1}(x) = (3 - x^5)^{1/3}$$

Figura 5.38: Gráfica de $y = t(x)$ y $y = t^{-1}(x)$.



Ejemplo 5.9.10

1. *Dibuje la gráfica de*

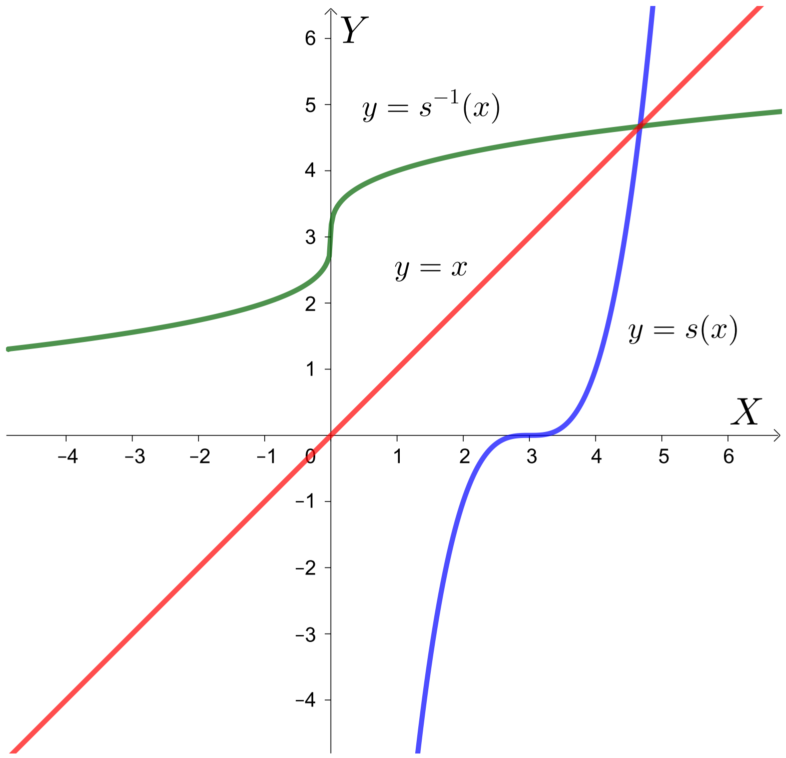
$$s(x) = (x-3)^3 \tag{5.64}$$

2. *Use la gráfica de s para dibujar la gráfica de s^{-1}.*

3. *Encuentre la ecuación de s^{-1}.*

Solución.

Figura 5.39: Gráfica de $y = s(x)$ y $y = s^{-1}(x)$.



Escribimos

$$y = s(x) = (x-3)^3$$

Despejemos la variable x:

$$\begin{aligned} y &= (x-3)^3 \\ y^{1/3} &= x - 3 \\ y^{1/3} + 3 &= x \end{aligned}$$

Intercambiando x por y se tiene

$$y = x^{1/3} + 3$$

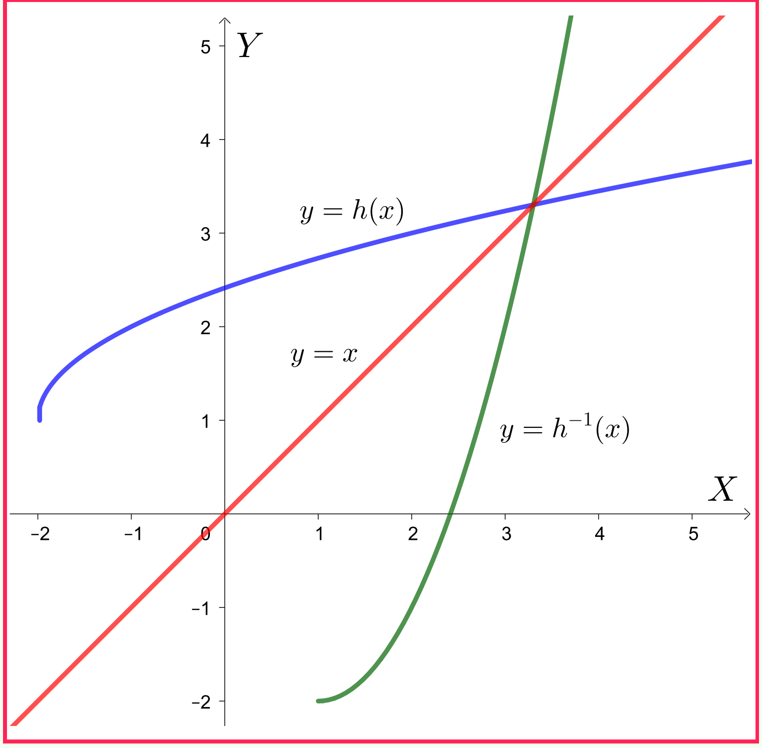
Por lo tanto, $s^{-1}(x) = x^{1/3} + 3$.

Ejemplo 5.9.11

1. *Dibuje la gráfica $h(x) = 1 + \sqrt{x+2}$*
2. *Use la gráfica de h para dibujar la gráfica de h^{-1}.*
3. *Encuentre la ecuación de h^{-1}.*

Solución.

Figura 5.40: Gráfica de $y = h(x)$ y $y = h^{-1}(x)$.



El dominio de h, es $[-2, +\infty\rangle$ *de donde,* $y = 1 + \sqrt{x+2} \geq 1$.
Escribimos

$$y = h(x) = 1 + \sqrt{x+2}, y \geq 1$$

Despejemos la variable x:

$$\begin{aligned} y &= 1 + \sqrt{x+2}, y \geq 1 \\ (y-1)^2 &= x+2, y \geq 1 \\ (y-1)^2 - 2 &= x, y \geq 1 \end{aligned}$$

Intercambiando x por y:

$$y = (x-1)^2 - 2, x \geq 1$$

Por lo tanto, $h^{-1}(x) = (x-1)^2 - 2$, $x \geq 1$.

5.10. Funciones racionales

Una función racional es la expresión:

$$\boxed{R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},} \tag{5.65}$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$, son polinomios.

Ejemplo 5.10.1

Las expresiones

$$R_1(x) = \frac{3x-9}{x+27}, R_2(x) = \frac{x^2-x-12}{x+2}, R_3(x) = \frac{2x+19}{x^2+2x-11} \tag{5.66}$$

son ejemplos de funciones racionales.

Ejemplo 5.10.2

La función $g(x) = \dfrac{1}{x}$, *es racional. Determine el comportamiento cuando* x *tiende a* $\pm\infty$ *o* 0.

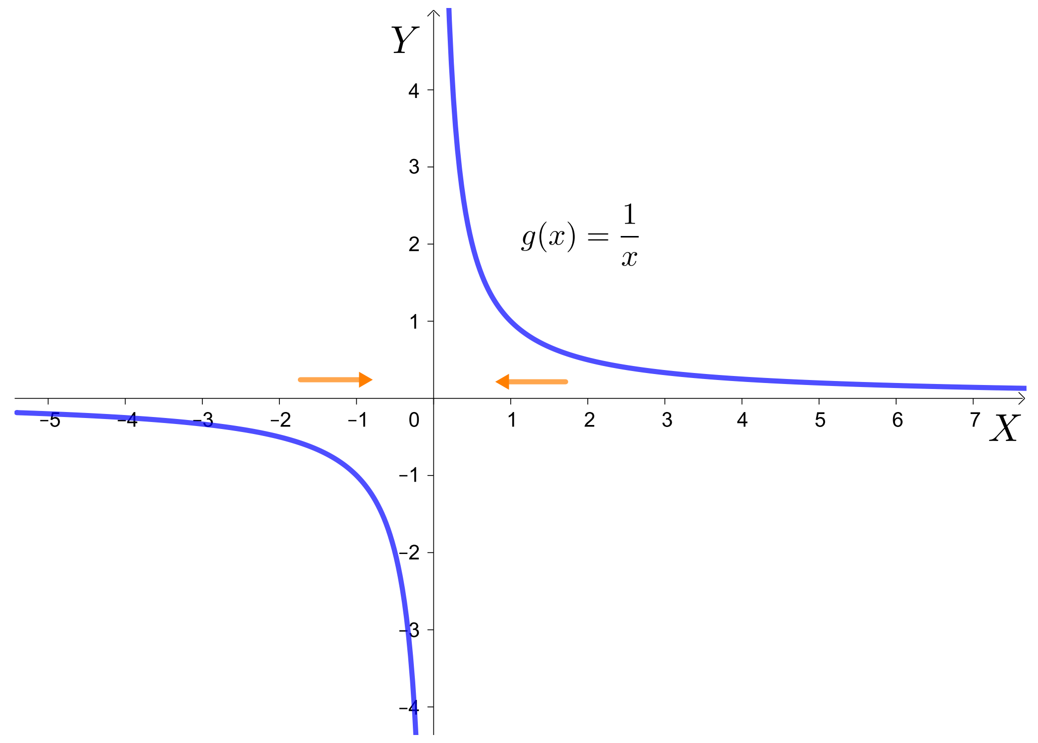
Solución. *Veamos los valores de* $g(x)$, *para* x *próximos a* 0:

$$\begin{aligned}
g(0.5) &= \frac{1}{0.5} = 2 & g(-0.5) &= \frac{1}{-0.5} = -2 \\
g(0.25) &= \frac{1}{0.25} = 4 & g(-0.25) &= \frac{1}{-0.25} = -4 \\
g(0.1) &= \frac{1}{0.1} = 10 & g(-0.1) &= -\frac{1}{-0.1} = -10 \\
g(0.01) &= \frac{1}{0.01} = 100 & g(-0.01) &= -100 \\
g(0.00001) &= \frac{1}{10^{-5}} = 100000 & g(-0.00001) &= -100000 \\
g(0.00000001) &= \frac{1}{10^{-8}} = 100000000 & g(-0.00000001) &= -100000000
\end{aligned}$$

tenemos

$$\begin{aligned}
x \longrightarrow 0^+ &\Longrightarrow g(x) \longrightarrow +\infty \\
x \longrightarrow 0^- &\Longrightarrow g(x) \longrightarrow -\infty
\end{aligned}$$

Figura 5.41: Gráfica de la ecuación $y = \dfrac{1}{x}$.



Mientras, los valores de $g(x)$ cuando x es próximo a $\pm\infty$ son:

$$
\begin{aligned}
g(1) &= \frac{1}{1} = 1 & \qquad g(-1) &= \frac{1}{-1} = -1 \\
g(100) &= \frac{1}{100} = 0.01 & \qquad g(-100) &= \frac{1}{-100} = -0.01 \\
g(10^5) &= \frac{1}{10^5} = 0.00001 & \qquad g(-10^5) &= \frac{1}{-10^5} = -0.00001
\end{aligned}
$$

De esto, se obtienen

$$
\begin{aligned}
x \longrightarrow +\infty \Longrightarrow g(x) \longrightarrow 0 \\
x \longrightarrow -\infty \Longrightarrow g(x) \longrightarrow 0
\end{aligned}
$$

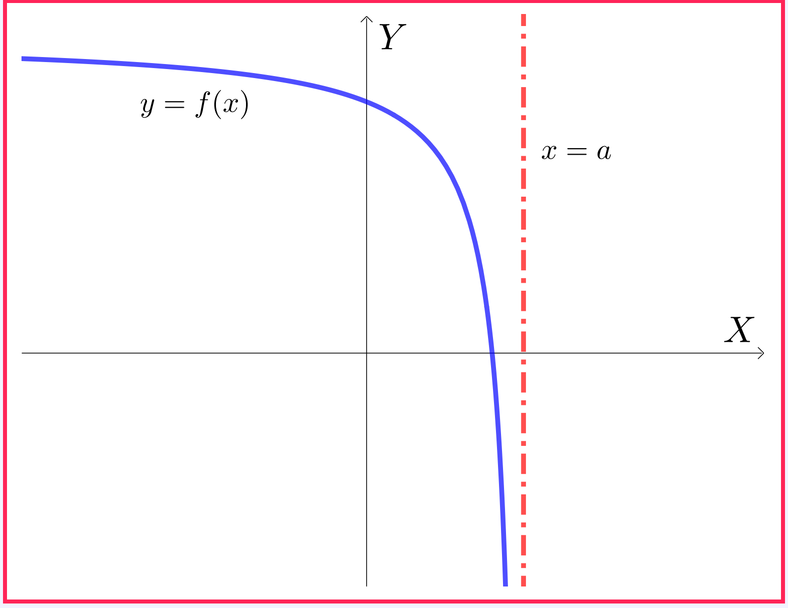
Asíntotas

Definición 5.10.1

Sea $y = f(x)$ una función. La ecuación $x = a$, es una asíntota vertical de f si:

$$\boxed{x \longrightarrow a^{\pm} \Longrightarrow f(x) \longrightarrow \pm\infty} \tag{5.67}$$

Figura 5.42: Gráfica de la ecuación $y = f(x)$, $f(x) \longrightarrow -\infty$ cuando $x \longrightarrow a^-$.

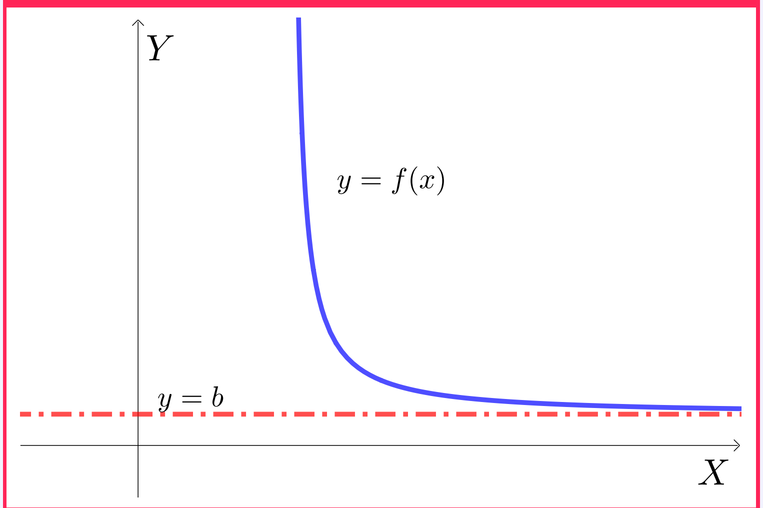


Definición 5.10.2

Sea $y = f(x)$ una función. La ecuación $y = b$, es una asíntota horizontal de f si:

$$\boxed{x \longrightarrow \pm\infty \Longrightarrow f(x) \longrightarrow b} \tag{5.68}$$

Figura 5.43: Gráfica de la ecuación $y = f(x)$, $f(x) \longrightarrow b$, cuando $x \longrightarrow +\infty$.



Definición 5.10.3

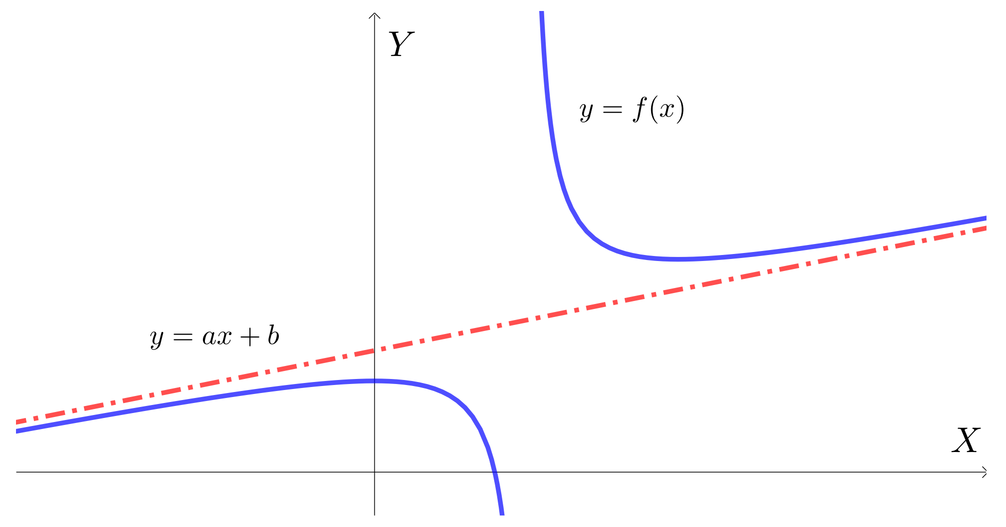
Sea $y = f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, *una función con* $grad(p(x)) - grad(q(x)) = 1$. *Aplicando algoritmo de división*

$$p(x) = q(x)(ax + b) + \frac{r(x)}{q(x)}, \tag{5.69}$$

donde $grad(r(x)) < grad(q(x))$. *Como* $\dfrac{r(x)}{q(x)}$ *tiende a cero entonces*

$$\boxed{x \longrightarrow \pm\infty \Longrightarrow f(x) = \frac{r(x)}{q(x)} \longrightarrow ax + b} \tag{5.70}$$

Figura 5.44: Gráfica de la ecuación $y = f(x)$, $f(x) \longrightarrow ax + b$, cuando $x \longrightarrow \pm\infty$.



La recta $y = ax + b$, *es llamado asíntota oblicua de la función* $y = f(x)$.

Ejemplo 5.10.3

Sea $h(x) = \dfrac{2x + 6}{x - 7}$. *Determine las asíntotas de de* h.

Solución.

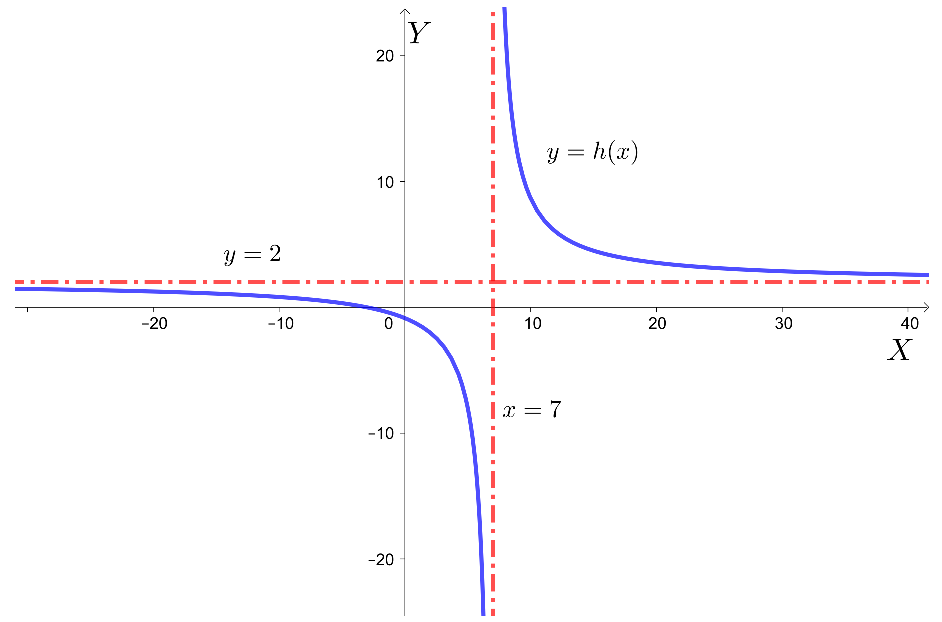
$$\begin{array}{l} \big(\quad 2x \quad + 6\big) \div \big(x - 7\big) = 2 + \dfrac{20}{x - 7} \\ \underline{\;-\,2x + 14\;} \\ \qquad\quad 20 \end{array}$$

Como

$$\frac{2x + 6}{x - 7} = 2 + \frac{20}{x - 7} \longrightarrow 2,\ x \longrightarrow \pm\infty \tag{5.71}$$

entonces $y = 2$ *y* $x = 7$ *son asíntotas horizontal y vertical de la función* $y = h(x)$, *respectivamente.*

Figura 5.45: Gráfica de la ecuación $y = h(x)$, asíntotas $y = 2$, y $x = 7$.



Ejemplo 5.10.4

Considere la función

$$s(x) = \frac{6x^2 - x + 2}{3x^2 + 5x - 2} \tag{5.72}$$

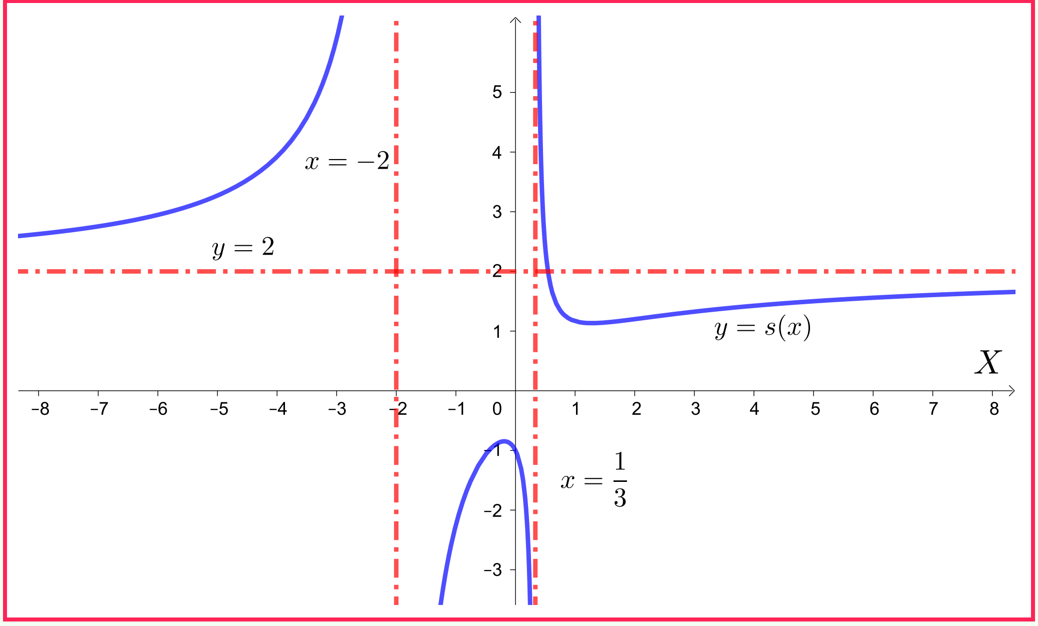
Solución.

Factorizando el denominador:

$$3x^2 + 5x - 2 = (3x - 1)(x + 2) \tag{5.73}$$

Esto indica que las rectas $x = \frac{1}{3}$ y $x = -2$ son asíntotas verticales.

Figura 5.46: Gráfica de la ecuación $y = s(x)$, asíntotas $y = 2$, $x = -2$ y $x = \frac{1}{3}$.



Dividiendo numerador y denominador por x^2 se tiene

$$s(x) = \frac{\frac{6x^2}{x^2} - \frac{x}{x^2} + \frac{2}{x^2}}{\frac{3x^2}{x^2} + \frac{5x}{x^2} - \frac{2}{x^2}} = \frac{6 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}}{3 + \frac{5}{x} - \frac{2}{x^2}} \longrightarrow 2,\ x \longrightarrow \pm\infty \tag{5.74}$$

este comportamiento define una asíntota $y = 2$, de la función $y = s(x)$.

Ejemplo 5.10.5

Sea la función

$$j(x) = \frac{x^2 + 7x + 10}{x - 1} \tag{5.75}$$

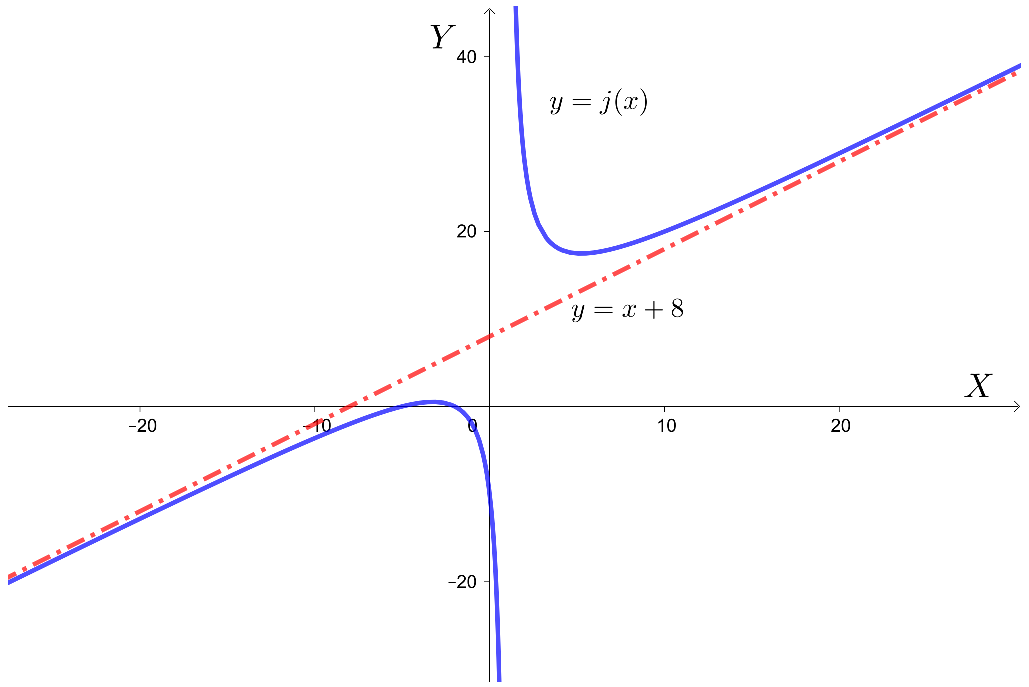
Determine las asíntotas.

Solución.

Se observa que $x = 1$ es una asíntota vertical de j. Dividiendo

$$\begin{array}{l} \left(x^2 + 7x + 10\right) \div \left(x - 1\right) = x + 8 + \dfrac{18}{x-1} \\ \underline{-x^2 \quad + x} \\ \qquad\quad 8x + 10 \\ \qquad \underline{-8x \quad + 8} \\ \qquad\qquad\quad 18 \end{array}$$

Figura 5.47: Gráfica de la ecuación $y = j(x)$.



Luego,

$$\frac{x^2+7x+10}{x-1} = x+8+\frac{18}{x-1} \longrightarrow x+8,\ x \longrightarrow \pm\infty \tag{5.76}$$

implica que $y = x + 8$, *viene ser asíntota oblícua de* $y = j(x)$.

Ejemplo 5.10.6

Considere la función

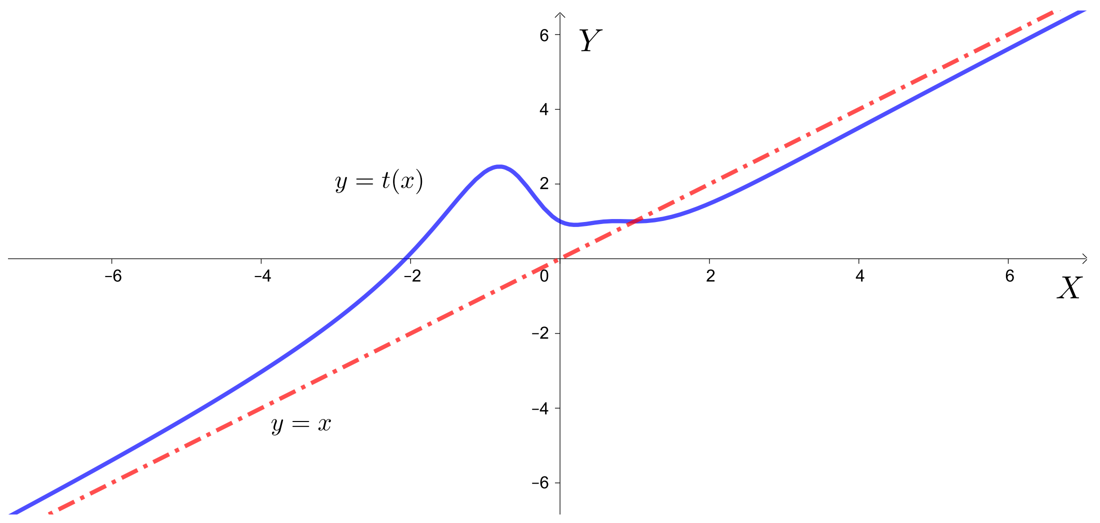
$$t(x) = \frac{x^5-2x^3+4x^2-x+1}{x^4+x^2+1} \tag{5.77}$$

Determine asíntotas.

Solución.

$$\begin{array}{l} \left(\ \ x^5 - 2x^3 + 4x^2 \ \ - x + 1\right) \div \left(x^4 + x^2 + 1\right) = x + \dfrac{-3x^3+4x^2-2x+1}{x^4+x^2+1} \\ \underline{-x^5 \ \ - x^3 \qquad\qquad - x} \\ \qquad -3x^3 + 4x^2 - 2x + 1 \end{array}$$

Figura 5.48: Gráfica de la ecuación $y = t(x)$.



Como $x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0$ *entonces no existe asíntota vertical. Por otro lado,* $t(x)$ *tiende a* $\pm\infty$*, cuando* $x \longrightarrow \pm\infty$*, por lo que* t *no tiene asíntonta horizontal.*
Según la división dada tenemos

$$\begin{aligned}\frac{x^5 - 2x^3 + 4x^2 - x + 1}{x^4 + x^2 + 1} &= x + \frac{-3x^3 + 4x^2 - 2x + 1}{x^4 + x^2 + 1} \\ &= x + \frac{1}{x}\left(\frac{-3 + \frac{4}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}}{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}}\right)\end{aligned}$$

De donde $\dfrac{x^5 - 2x^3 + 4x^2 - x + 1}{x^4 + x^2 + 1}$*, se aproxima a* $y = x$ *cuando* $x \longrightarrow \pm\infty$*. La recta* $y = x$ *es una asíntota de la función* $y = t(x)$*, ver la figura 5.48.*

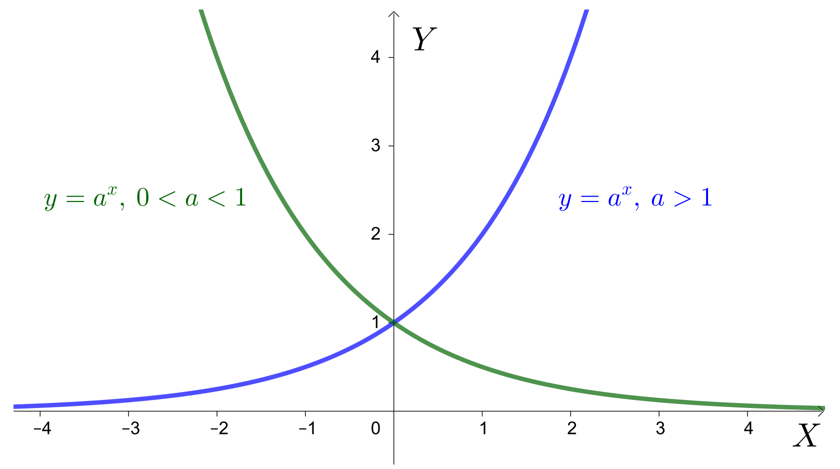
5.11. Funciones exponenciales

Definición 5.11.1

La función exponencial de base a*, se define de la siguiente manera*

$$\boxed{f(x) = a^x,\ a > 0, a \neq 1.} \tag{5.78}$$

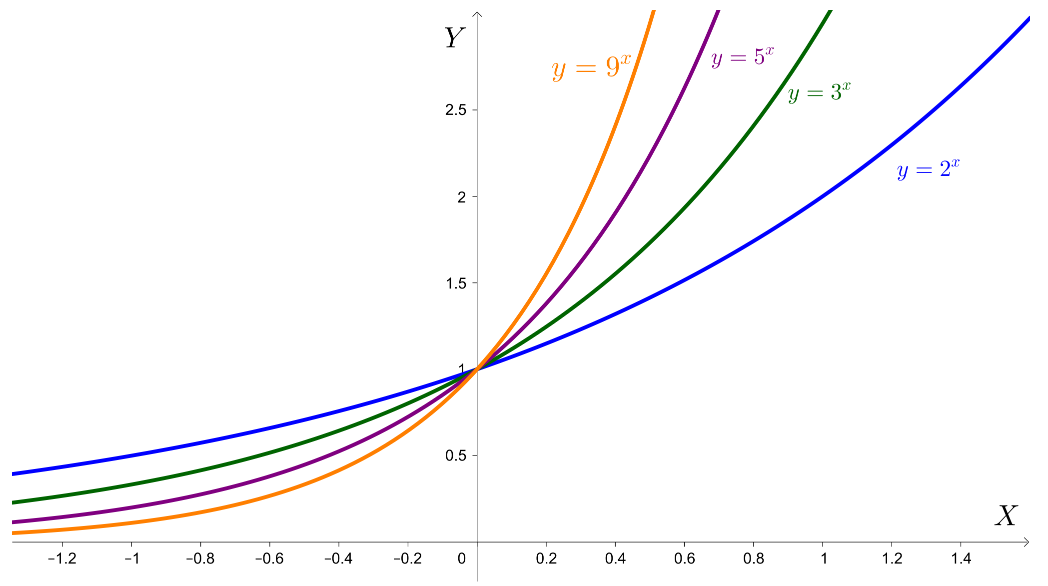
Figura 5.49: Gráfica de $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$.



Ejemplo 5.11.1

Gráficas de funciones exponenciales $y = a^x$, *para* $a = 2, 3, 5, 9$.

Figura 5.50: Gráfica de las funciones $y = 2^x$, $y = 3^x$, $y = 5^x$ y $y = 9^x$.



Ejemplo 5.11.2

Considere el modelo crecimiento logístico:

$$P(x) = \frac{\lambda}{1 + Ce^{-\beta x}}, \tag{5.79}$$

donde β, λ *y* C *son constantes positivos. Para la población de abejas en una colmena se cumplen* $\lambda = 2400$, $C = 11$ *y* $\beta = 0.2$ *y* x *se mide en años. Las abejas se introdujeron en el colmena en el tiempo* $x = 0$.

1. *¿Cuántas abejas fueron introducidos inicialmente en el colmena?*

2. *Encuentre la población de abejas después de 50 años.*

3. *Dibuje $y = P(x)$.*

4. *¿A qué valor se aproxima $P(x)$, cuando x tiende $+\infty$?*

Solución.

1. *Como* $\lambda = 2400$, $C = 11$ *y* $\beta = 0.2$ *entonces*

$$\begin{aligned} P(0) &= \frac{2400}{1 + 11e^{-0.2(0)}} \\ &= \frac{2400}{12} \\ &= 200 \end{aligned}$$

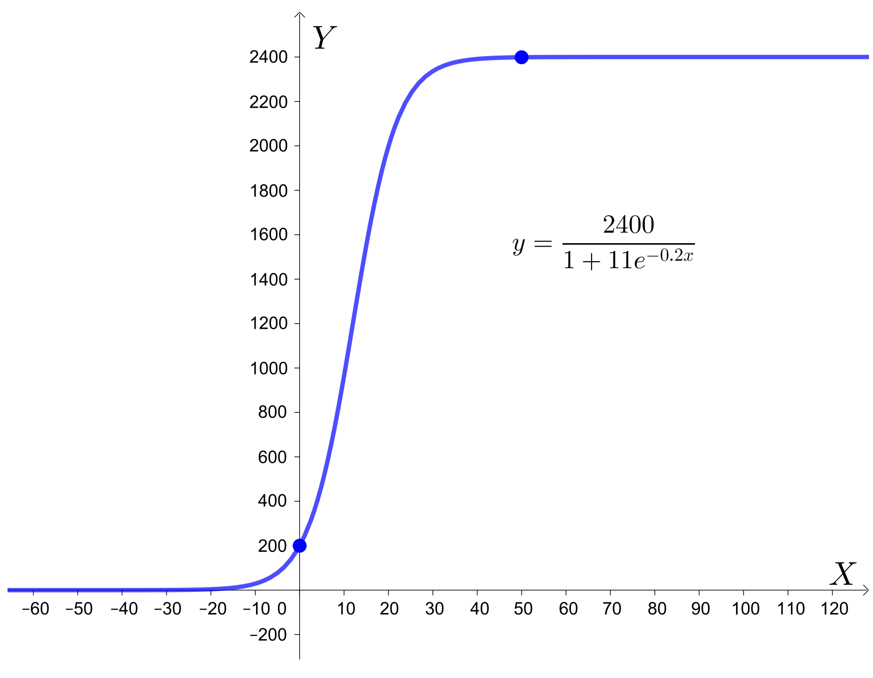
Se introdujeron 200 *abejas, al inicio.*

2. $P(50)$ *es la cantidad de abejas después de* 50 *años, de donde*

$$\begin{aligned} P(50) &= \frac{2400}{1 + 11e^{-0.2(50)}} \\ &= \frac{2400}{1 + 11e^{-10}} \\ &= 2398.80 \approx 2399 \end{aligned}$$

3. *El gráfico del modelo población es dada por*

Figura 5.51: Gráfica de $y = P(x)$.



4. *Siendo* $x \longrightarrow +\infty$, *la expresión* $e^{-0.2x}$, *tiende para* 0. *Consecuentemente,*

$$x \longrightarrow +\infty \Longrightarrow P(x) = \frac{2400}{1 + 11e^{-0.2x}} \longrightarrow \frac{2400}{1 + 0} = 2400$$

5.12. Funciones logarítmicas

Definición 5.12.1

El logaritmo de base a, denotado por Log_a es definido por

$$\boxed{y = \text{Log}_a x \iff a^y = x} \tag{5.80}$$

donde $a > 0$ y $a \neq 1$.

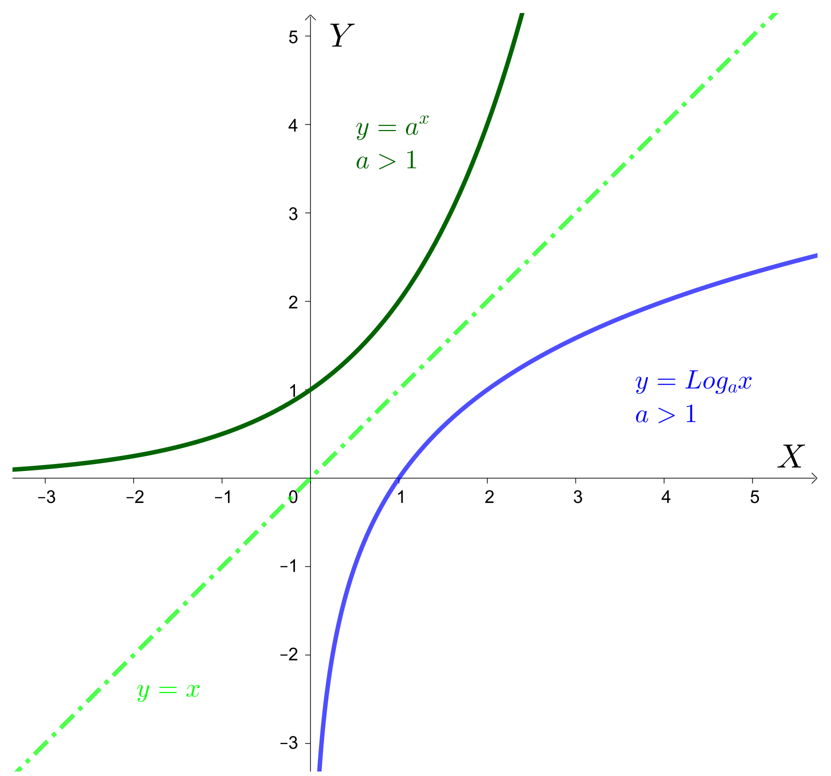
Teorema 5.12.1

Inv1) *Sea $a > 1$. Entonces $y = \text{Log}_a x$, es función inversa de la exponencial $y = a^x$ si y solo si, $y = a^x$ es función inversa de la función $y = \text{Log}_a x$.*

Inv2) *Sea $1 > a > 0$. Entonces $y = \text{Log}_a x$, es función inversa de la exponencial $y = a^x$ si y solo si, $y = a^x$ es función inversa de la función $y = \text{Log}_a x$.*

La función logaritmo Log_a, es función inversa de la exponencial su gráfica se obtiene esbozando la imagen de la reflexión de la exponencial mediante un espejo colocado en $y = x$, como se observa en las figuras 5.52 y 5.53.

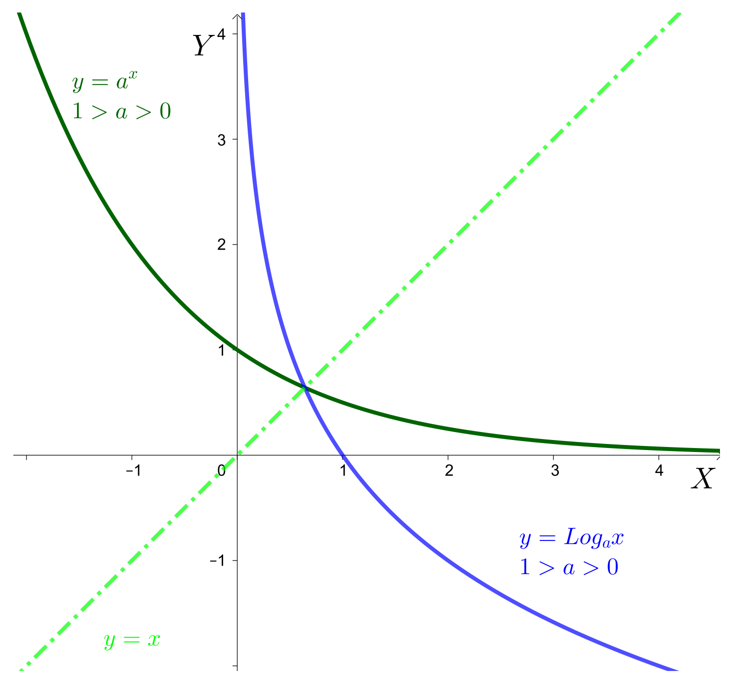
Figura 5.52: Gráficas de $y = \text{Log}_a x$ y $y = a^x$, con $a > 1$.



Comportamiento de Log_a, para $a > 1$:

$$x \longrightarrow 0^+ \Longrightarrow \text{Log}_a\, x \longrightarrow -\infty$$
$$x \longrightarrow +\infty \Longrightarrow \text{Log}_a\, x \longrightarrow +\infty$$

Figura 5.53: Gráficas de $y = \text{Log}_a\, x$ y $y = a^x$, con $1 > a > 0$.



Comportamiento de Log_a, para $1 > a > 0$:

$$x \longrightarrow 0^+ \Longrightarrow \text{Log}_a\, x \longrightarrow +\infty$$
$$x \longrightarrow +\infty \Longrightarrow \text{Log}_a\, x \longrightarrow -\infty$$

Por definición se verifica las siguientes propiedades:

$$\boxed{\text{Log}_a\, 1 = 0} \tag{5.81}$$

$$\boxed{\text{Log}_a\, a = 1} \tag{5.82}$$

$$\boxed{\text{Log}_a\, a^x = x} \tag{5.83}$$

$$\boxed{a^{\text{Log}_a x} = x, x > 0.} \tag{5.84}$$

Teorema 5.12.2

Sean x y y son reales positivos con $a > 0$, $a \neq 1$. Entonces

Lg1) $\operatorname{Log}_a(xy) = \operatorname{Log}_a x + \operatorname{Log}_a y$

Lg2) $\operatorname{Log}_a\left(\frac{x}{y}\right) = \operatorname{Log}_a x - \operatorname{Log}_b y$

Lg3) $\operatorname{Log}_a(x^y) = y \operatorname{Log}_a x$

Lg4) $\operatorname{Log}_a x = \dfrac{\operatorname{Log}_b x}{\operatorname{Log}_b a}$

Lg5) $\operatorname{Log}_a x = \operatorname{Log}_a y \iff x = y$

Demostración.

Lg1) *Considere $z_1 = \operatorname{Log}_a x$ y $z_2 = \operatorname{Log}_a y$, por definición 5.12.1 tenemos $a^{z_1} = x$ y $a^{z_2} = y$. Luego,*

$$\begin{aligned} a^{z_1+z_2} &= a^{z_1}a^{z_2} \\ &= xy \end{aligned}$$

y por definición 5.12.1, se tiene $\operatorname{Log}_a(xy) = z_1 + z_2 = \operatorname{Log}_a x + \operatorname{Log}_a y$.

Lg2) *Sean $z_1 = \operatorname{Log}_a x$ y $z_2 = \operatorname{Log}_a y$, por definición 5.12.1 se obtienen $a^{z_1} = x$ y $a^{z_2} = y$. Ahora,*

$$a^{z_1-z_2} = a^{z_1}a^{-z_2} = \frac{a^{z_1}}{a^{z_2}} = \frac{x}{y}$$

Nuevamente, por definición 5.12.1 se concluye $\operatorname{Log}_a\left(\frac{x}{y}\right) = z_1 - z_2 = \operatorname{Log}_a x - \operatorname{Log}_a y$.

Lg3) *Sea $z = \operatorname{Log}_a x$ entonces $a^z = x$. Elevando ambos lados por y se tiene $(a^z)^y = x^y$, es decir, $a^{zy} = x^y$. Por definición 5.12.1, $\operatorname{Log}_a x^y = zy = y\operatorname{Log}_a x$.*

Lg4) *Sean $z = \operatorname{Log}_b x$ y $w = \operatorname{Log}_b a$. Entonces $b^z = x$ y $b^w = a$. Luego,*

$$a^{\frac{z}{w}} = \left(a^{\frac{1}{w}}\right)^z = (b)^z = x$$

Por definición 5.12.1, $\operatorname{Log}_a x = \dfrac{\operatorname{Log}_b x}{\operatorname{Log}_b a}$.

Lg5) *Como $\operatorname{Log}_a x = \operatorname{Log}_a y$ y por definición 5.12.1 entonces*

$$a^{\operatorname{Log}_a y} = x$$

y aplicando la propiedad (5.84), $x = y$.

Logaritmos en base 10 y en base $\boxed{e = 2.7182818284...}$ serán denotados por:

$$\boxed{\operatorname{Log} x = \operatorname{Log}_{10} x} \tag{5.85}$$

y

$$\boxed{\ln x = \operatorname{Log}_e x} \tag{5.86}$$

Las propiedades obvias de logaritmo natural son:

L1) $\ln 1 = 0$

L2) $\ln e = 1$

L3) $\ln e^x = x$

L4) $e^{\ln x} = x$

Ejemplo 5.12.1

Hallar:

1. $\operatorname{Log}_2 4096$
2. $\operatorname{Log}_{1/3} 81$
3. $\operatorname{Log}_5 \left(\dfrac{1}{125}\right)$

Solución.

$$\operatorname{Log}_2 4096 = 12 \textit{ equivale a } 4096 = 2^{12}$$
$$\operatorname{Log}_{1/3} 81 = -4 \textit{ equivale a } \left(\frac{1}{3}\right)^{-4} = 81$$
$$\operatorname{Log}_5 \left(\frac{1}{125}\right) = -3 \textit{ equivale a } 5^{-3} = \frac{1}{125}$$

Ejemplo 5.12.2

Encontrar x, en la ecuación:

$$\operatorname{Log}_c x + \frac{2}{3}\operatorname{Log}_c 8 = \frac{3}{2}\operatorname{Log}_c 4 + 2\operatorname{Log}_c 2, \tag{5.87}$$

con $c > 0$, $c \neq 1$.
Solución. *Aplicando las propiedades de logarítmo, tenemos:*

$$\operatorname{Log}_c x + \frac{2}{3}\operatorname{Log}_c 8 = \frac{3}{2}\operatorname{Log}_c 4 + 2\operatorname{Log}_c 2$$
$$\operatorname{Log}_c x + \operatorname{Log}_c 8^{2/3} = \operatorname{Log}_c 4^{3/2} + \operatorname{Log}_c 2^2$$
$$\operatorname{Log}_c 8^{2/3}x = \operatorname{Log}_c 4^{3/2}2^2$$

Usando el Teorema 5.12.2: Lg5), a la última ecuación anterior, se obtiene

$$\begin{aligned} 8^{2/3}x &= 4^{3/2}2^2 \\ x &= \frac{(2^2)^{3/2}2^2}{(2^3)^{2/3}} \\ x &= \frac{2^5}{2^2} \\ x &= 8 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $x = 8$ es la solución de la ecuación (5.87).

Ejemplo 5.12.3

Resolver:

$$\mathrm{Log}_7(3x-1) - \mathrm{Log}_7(3x+1) = 1 \tag{5.88}$$

Solución. *Como*

$$\begin{aligned} \mathrm{Log}_7(3x-1) - \mathrm{Log}_7(3x+1) &= 1 \\ \mathrm{Log}_7\left(\frac{3x-1}{3x+1}\right) &= \mathrm{Log}_7 7 \end{aligned}$$

entonces por Teorema 5.12.2: Lg5),

$$\begin{aligned} \frac{3x-1}{3x+1} &= 7 \\ 3x-1 &= 7(3x+1) \\ 3x-1 &= 21x+7 \\ 3x-21x &= 7+1 \\ -18x &= 8 \\ x &= -\frac{4}{9} \end{aligned}$$

Por consiguiente, $x = -\dfrac{4}{9}$ es solución de la ecuación (5.88).

Ejemplo 5.12.4

Sea sabe que $h(x) = e^{\alpha x} + b$, con $h(0) = 2$ y $h(\ln 2) = 5$. Calcular $h(\ln 64)$.

Solución.

Usando condiciones tenemos

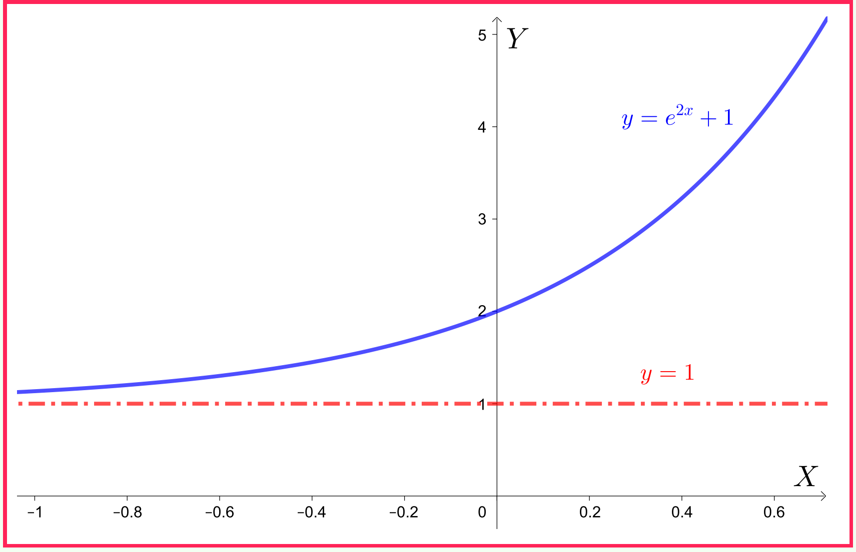
$$\begin{aligned} 2 = h(0) &= e^{\alpha 0} + b \\ &= 1 + b \end{aligned}$$

De ahí, $b = 1$. Además, por otra condición

$$\begin{aligned} 5 &= h(\ln 2) \\ &= e^{\alpha \ln 2} + 1 \\ &= 2^{\alpha} + 1 \end{aligned}$$

esto da $\alpha = 2$. *Por consiguiente,* $h(x) = e^{2x} + 1$.

Figura 5.54: Gráfica de $y = e^x + 1$.



Ahora,

$$\begin{aligned} h(\ln 64) &= e^{2\ln 64} + 1 \\ &= e^{\ln 2^{12}} + 1 \\ &= 2^{12} + 1 \\ &= 4097 \end{aligned}$$

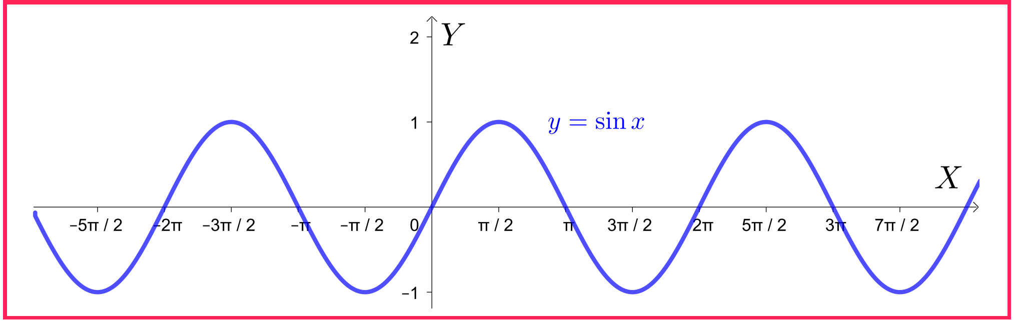
5.13. Funciones trigonométricas

1. Función seno:

$$\boxed{\sin : \mathbb{R} \longrightarrow [-1,1],\ x \longmapsto \sin x,} \tag{5.89}$$

donde $\mathrm{Dom}(\sin) = \mathbb{R}$ y $\mathrm{Rang}(\sin) = [-1,1]$.

Figura 5.55: Gráfica de $y = \sin x$.

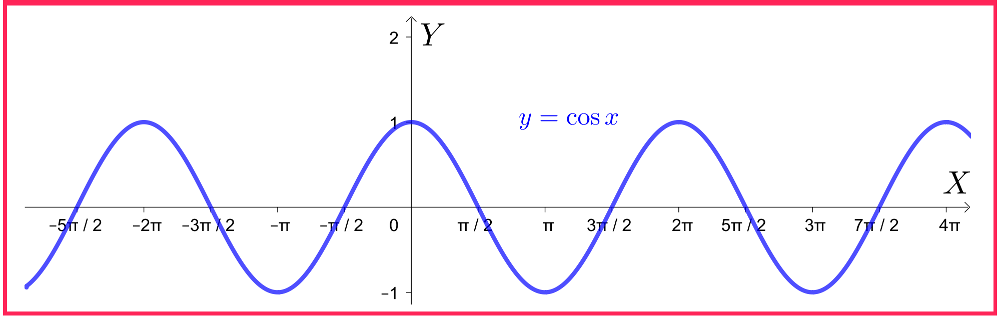


2. Función coseno:

$$\boxed{\cos : \mathbb{R} \longrightarrow [-1,1],\ x \longmapsto \cos x,} \tag{5.90}$$

donde $\mathrm{Dom}(\cos) = \mathbb{R}$ y $\mathrm{Rang}(\cos) = [-1,1]$.

Figura 5.56: Gráfica de $y = \cos x$.

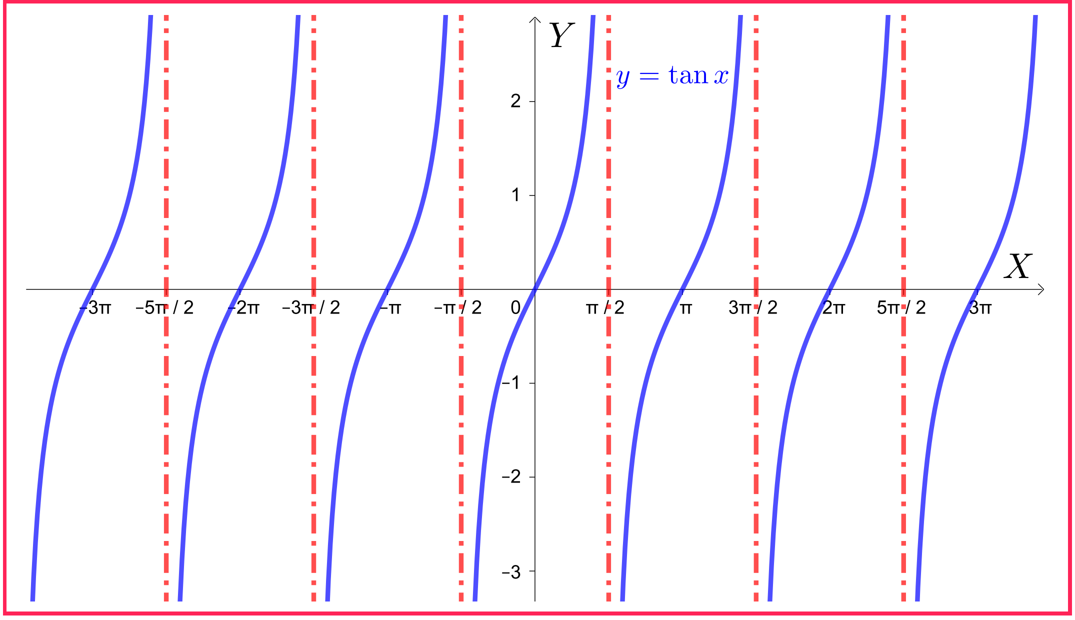


3. Función tangente:

$$\boxed{\tan : \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2}(2k+1) : k \in \mathbb{Z}\right\} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \tan x = \frac{\sin x}{\cos x},} \tag{5.91}$$

donde $\mathrm{Dom}(\tan) = \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2}(2k+1) : k \in \mathbb{Z}\right\}$ y $\mathrm{Rang}(\tan) = \mathbb{R}$.

Figura 5.57: Gráfica de $y = \tan x$.

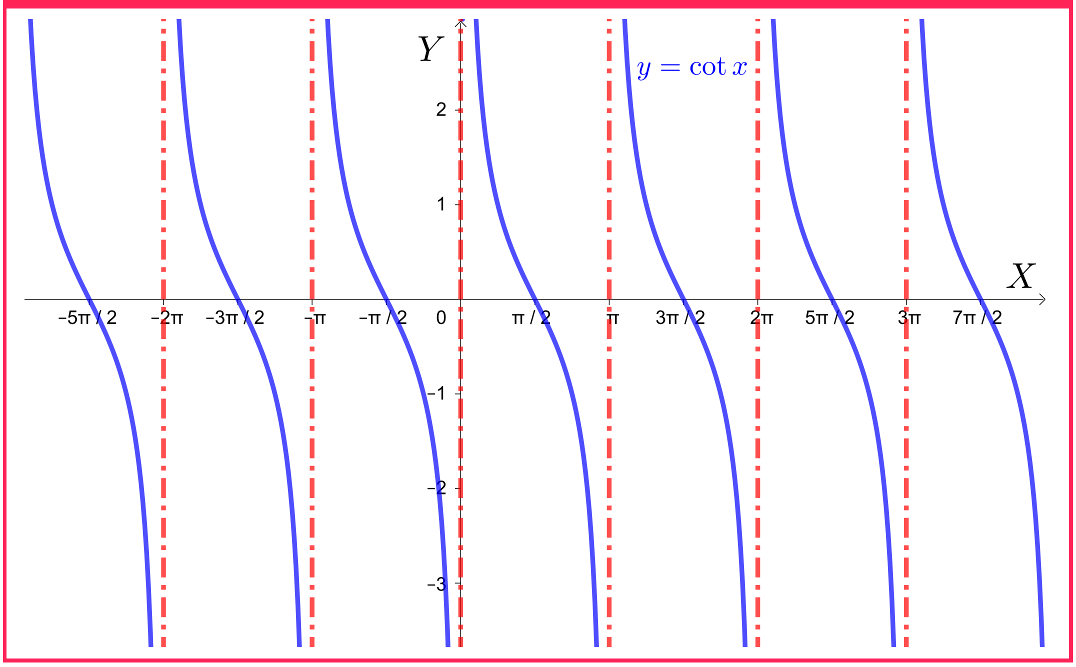


4. Función cotangente:

$$\boxed{\cot : \mathbb{R} - \{\pi k : k \in \mathbb{Z}\} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \cot x = \frac{\cos x}{\sin x},} \tag{5.92}$$

donde $\mathrm{Dom}(\cot) = \mathbb{R} - \{\pi k : k \in \mathbb{Z}\}$ y $\mathrm{Rang}(\cot) = \mathbb{R}$.

Figura 5.58: Gráfica de $y = \cot x$.

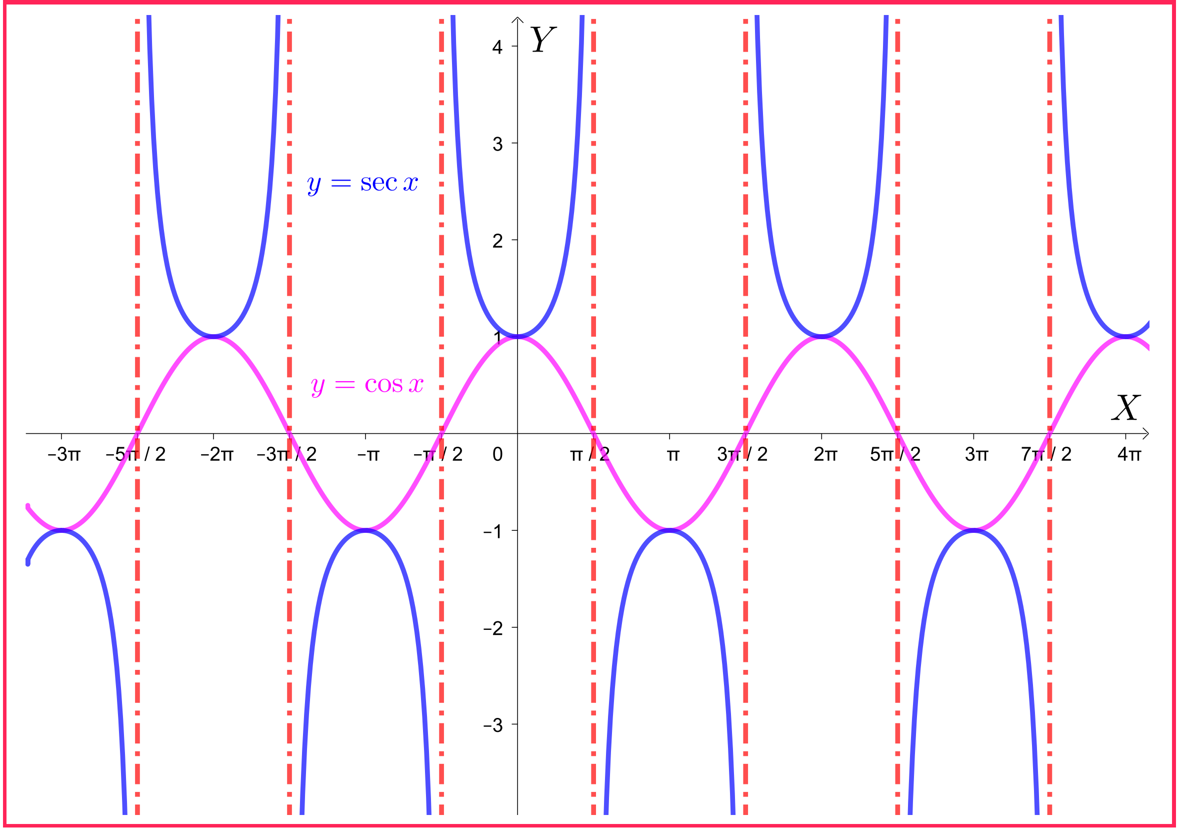


5. Función secante:

$$\boxed{\sec : \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2}(2k+1) : k \in \mathbb{Z}\right\} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \sec x = \frac{1}{\cos x},} \tag{5.93}$$

donde $\mathrm{Dom}(\sec) = \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2}(2k+1) : k \in \mathbb{Z}\right\}$ y $\mathrm{Rang}(\sec) = \langle -\infty, -1] \cup [1, +\infty\rangle$.

Figura 5.59: Gráfica de $y = \cos x$ y $y = \sec x$.

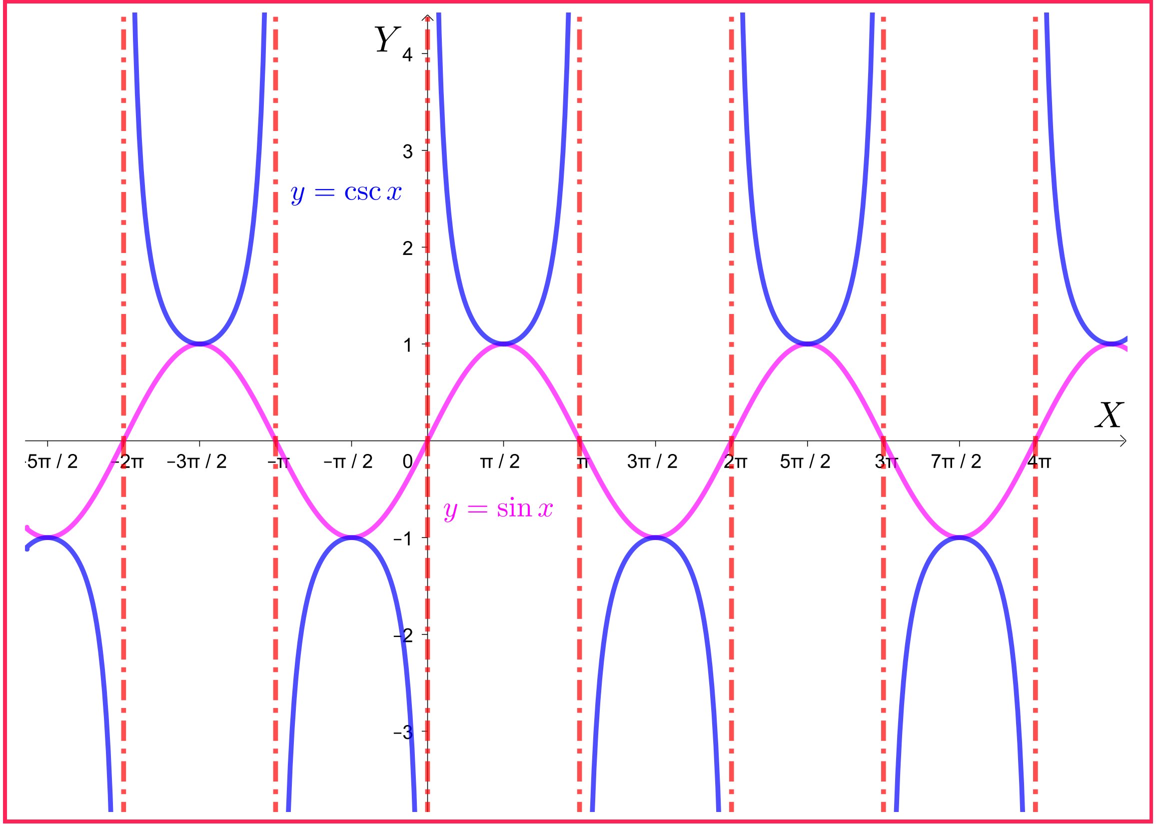


6. Función cosecante:

$$\boxed{\csc : \mathbb{R} - \{\pi k : k \in \mathbb{Z}\} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \csc x = \frac{1}{\sin x},} \tag{5.94}$$

donde $\mathrm{Dom}(\csc) = \mathbb{R} - \{\pi k : k \in \mathbb{Z}\}$ y $\mathrm{Rang}(\csc) = \langle -\infty, -1] \cup [1, +\infty\rangle$.

Figura 5.60: Gráfica de $y = \csc x$ y $y = \sin x$.



Ejemplo 5.13.1

Considere

$$h(x) = 2\sin(x) + 4, \tag{5.95}$$

halle dominio y rango de h.

Solución. *Como* sin, *está definida en todo* $\mathbb{R}$, *entonces* $\mathrm{Dom}(h) = \mathbb{R}$; *para encontrar el rango usemos que* $\sin(x) \in [-1, 1]$, *de esto,*

$$\begin{aligned} -1 &\leq \sin(x) \leq 1 \\ -2 &\leq 2\sin(x) \leq 2 \\ 2 &\leq 2\sin(x) + 4 \leq 6 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mathrm{Rang}(h) = [2, 6]$.

5.14. Funciones trigonométricas inversas

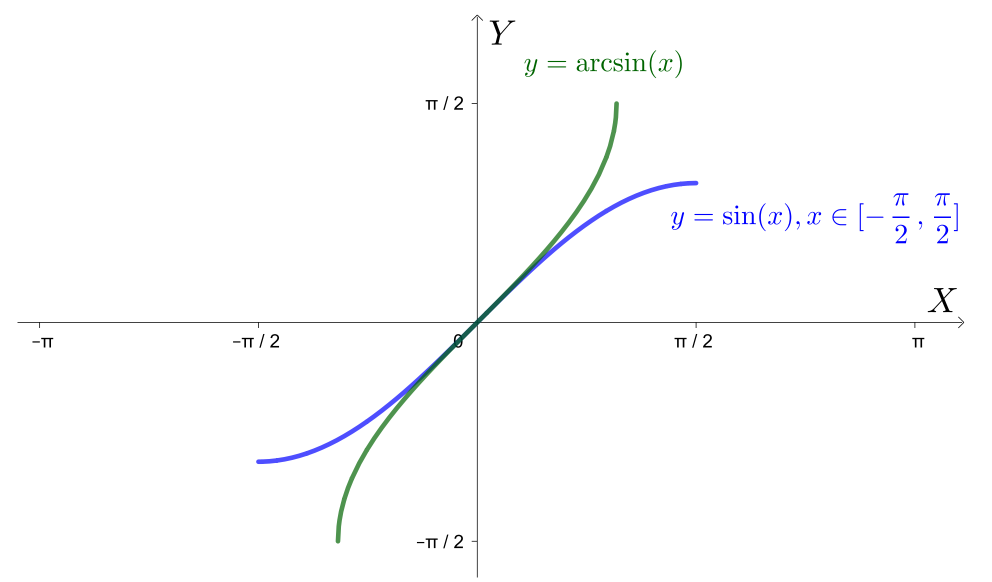
T1) Función arcseno: la función arcsin, está definida por

$$\boxed{y = \arcsin x \Longleftrightarrow \sin y = x \wedge y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} \tag{5.96}$$

$$\text{Dom}(\arcsin) = [-1, 1] \tag{5.97}$$

$$\text{Rang}(\arcsin) = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \tag{5.98}$$

Figura 5.61: Gráfica de $y = \arcsin(x)$.



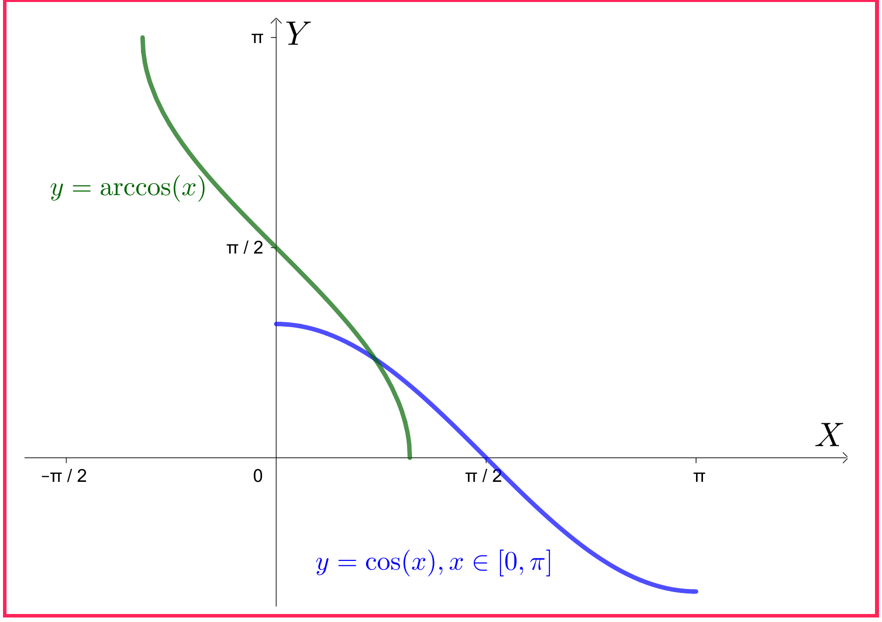
T2) Función arccoseno: la función arc cos, está definida por

$$\boxed{y = \arccos x \Longleftrightarrow \cos y = x \wedge y \in [0, \pi]} \tag{5.99}$$

$$\text{Dom}(\arccos) = [-1, 1] \tag{5.100}$$

$$\text{Rang}(\arccos) = [0, \pi] \tag{5.101}$$

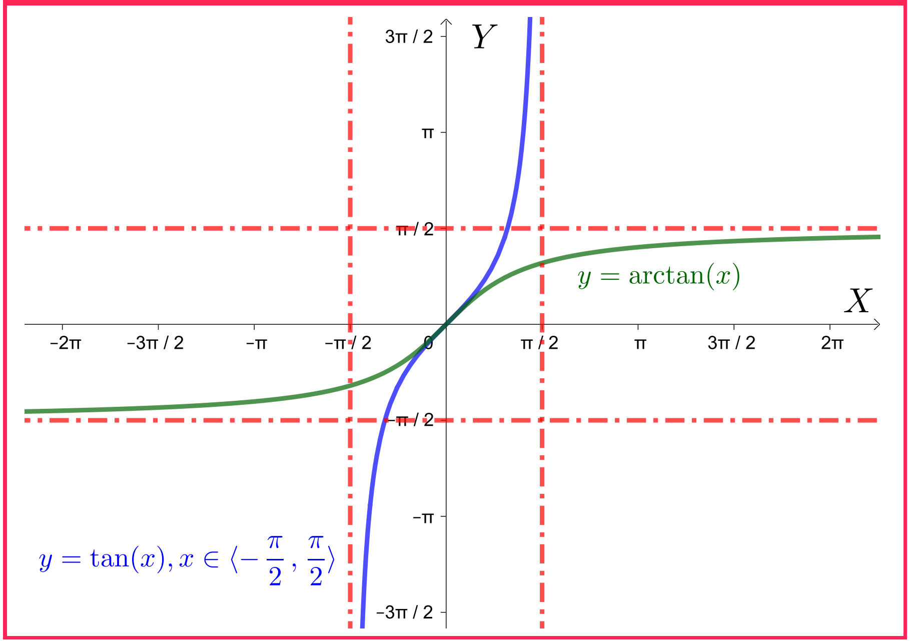
Figura 5.62: Gráfica de $y = \arccos(x)$.



T3) Función arcotangente: la función arctan, está definida por

$$\boxed{y = \arctan x \iff \tan y = x \wedge y \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle} \tag{5.102}$$

Figura 5.63: Gráfica de $y = \arctan(x)$.



$$\operatorname{Dom}(\arctan) = \mathbb{R} \tag{5.103}$$

$$\operatorname{Rang}(\arctan) = \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle \tag{5.104}$$

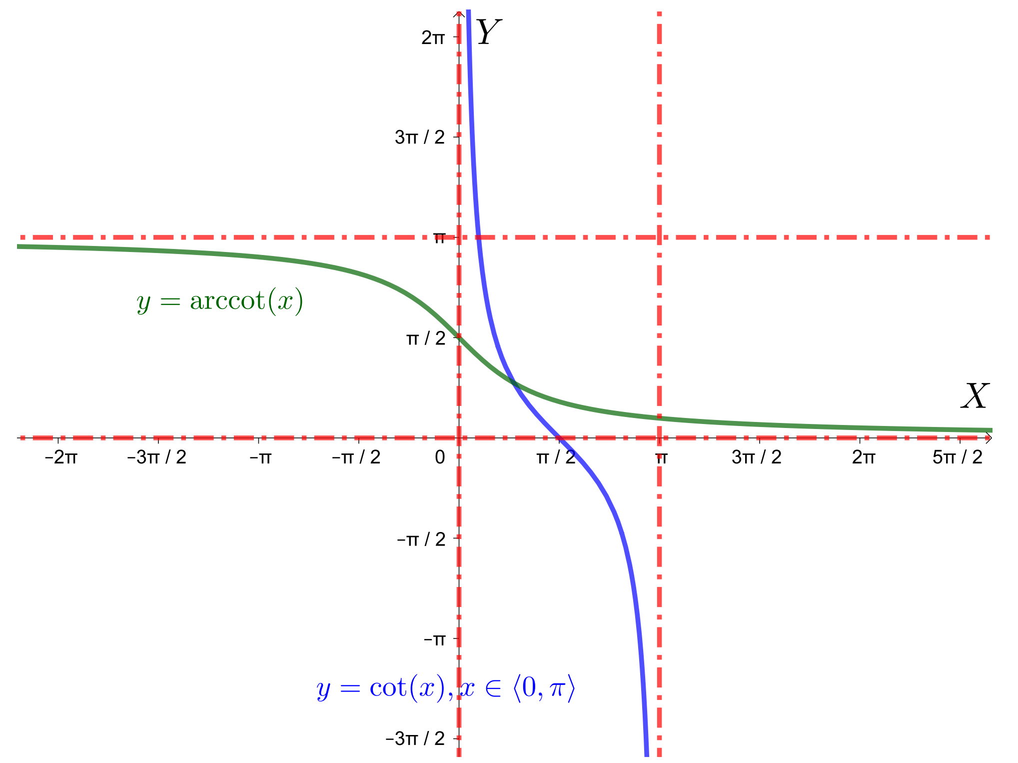
T4) Función arcocotagente: la función $\operatorname{arc}\cot$, está definida por

$$\boxed{y = \operatorname{arc}\cot x \iff \cot y = x \wedge y \in \langle 0, \pi \rangle} \tag{5.105}$$

$$\operatorname{Dom}(\operatorname{arc}\cot) = \mathbb{R} \tag{5.106}$$

$$\operatorname{Rang}(\operatorname{arc}\cot) = \langle 0, \pi \rangle \tag{5.107}$$

Figura 5.64: Gráfica de $y = \operatorname{arc}\cot(x)$.



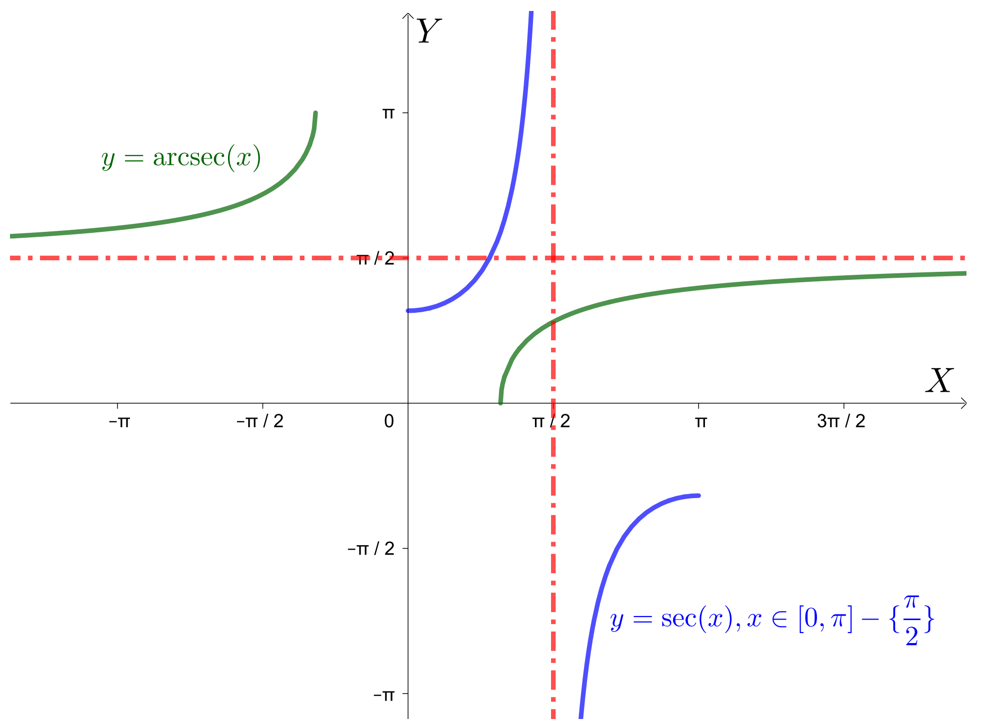
T5) Función arcsecante: la función $\operatorname{arc}\sec$, está definida por

$$\boxed{y = \operatorname{arc}\sec x \iff \sec y = x \wedge y \in [0, \pi] - \{\frac{\pi}{2}\}} \tag{5.108}$$

$$\operatorname{Dom}(\operatorname{arc}\sec) = \langle -\infty, -1] \cup [1, +\infty \rangle \tag{5.109}$$

$$\operatorname{Rang}(\operatorname{arc}\sec) = [0, \frac{\pi}{2} \rangle \cup \langle \frac{\pi}{2}, \pi] \tag{5.110}$$

Figura 5.65: Gráfica de $y = \operatorname{arc\,sec}(x)$.



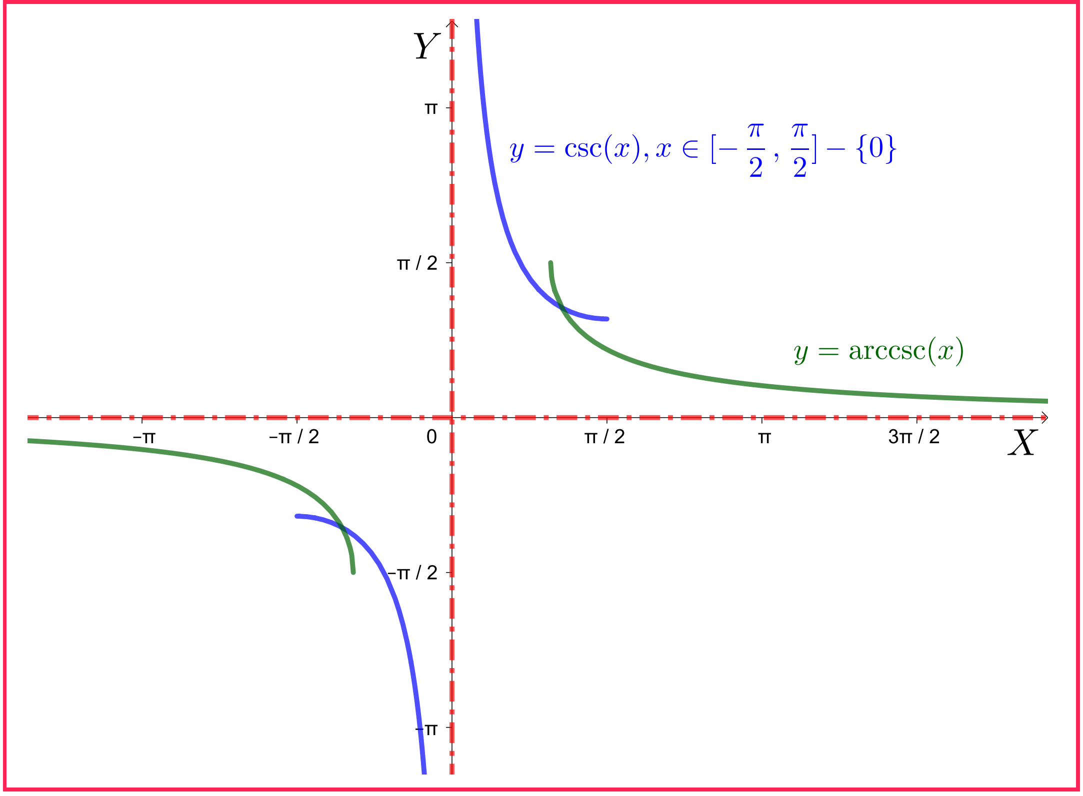
T6) Función arcocosecante: la función arc csc, está definida por

$$\boxed{y = \operatorname{arc\,csc} x \iff \csc y = x \wedge y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] - \{0\}} \tag{5.111}$$

$$\operatorname{Dom}(\operatorname{arc\,csc}) = \langle -\infty, -1] \cup [1, +\infty\rangle \tag{5.112}$$

$$\operatorname{Rang}(\operatorname{arc\,csc}) = [-\frac{\pi}{2}, 0\rangle \cup \langle 0, \frac{\pi}{2}] \tag{5.113}$$

Figura 5.66: Gráfica de $y = \operatorname{arc}\csc(x)$.



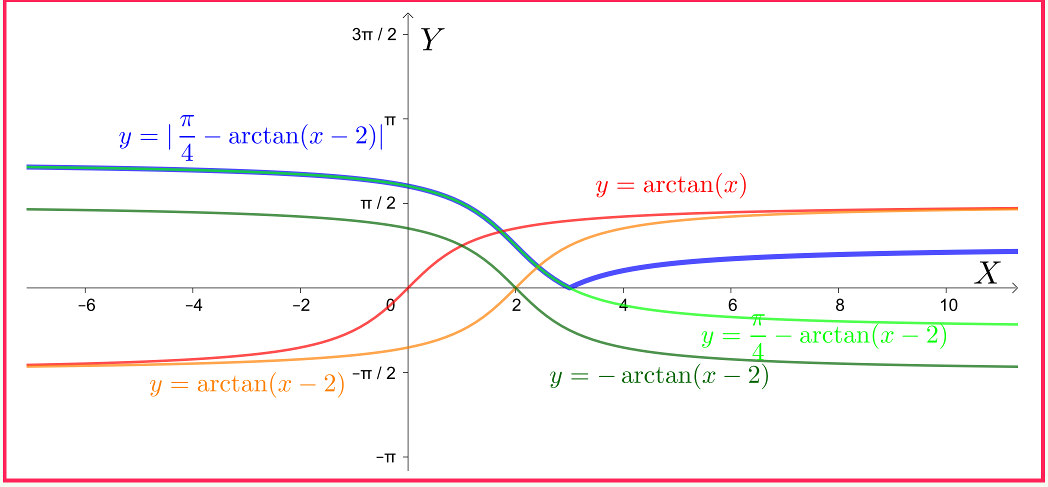
Ejemplo 5.14.1

Dibujar el gráfico de

$$y = |\frac{\pi}{4} - \arctan(x-2)| \tag{5.114}$$

Solución.

Figura 5.67: Gráfica de $y = |\frac{\pi}{4} - \arctan(x-2)|$.



Ejemplo 5.14.2

Encuentre el dominio y el rango de la siguiente función trigonométrica:

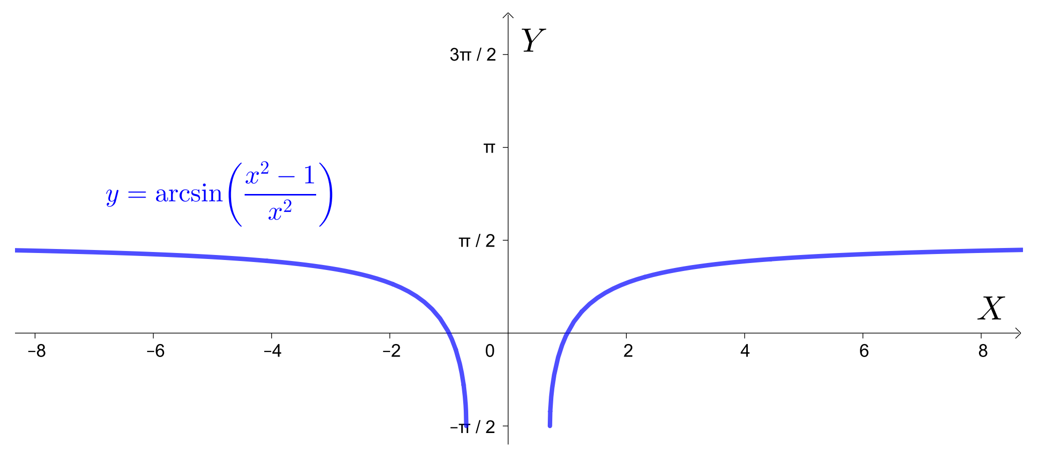
$$g(x) = \arcsin\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right) \tag{5.115}$$

Solución. *El argumento de la función g debe encontrarse dentro del intervalo $[-1,1]$, esto genera dos inecuaciones:*

$$\begin{aligned}
-1 \leq \frac{x^2-1}{x^2} \leq 1 &\Longrightarrow \frac{x^2-1}{x^2} \geq -1 \wedge \frac{x^2-1}{x^2} \leq 1\\
&\Longrightarrow \frac{x^2-1+x^2}{x^2} \geq 0 \wedge \frac{x^2-1-x^2}{x^2} \leq 0\\
&\Longrightarrow \frac{2x^2-1}{x^2} \geq 0 \wedge -\frac{1}{x^2} \leq 0\\
&\Longrightarrow 2\frac{\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{x^2} \geq 0 \wedge \frac{1}{x^2} \geq 0\\
&\Longrightarrow x \in \langle -\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}] \cup [\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\rangle \wedge x \in \mathbb{R} - \{0\}\\
&\Longrightarrow x \in \langle -\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}] \cup [\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\rangle
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mathrm{Dom}(g) = x \in \langle -\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}] \cup [\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\rangle$.

Figura 5.68: Gráfica de $y = \arcsin\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)$.



Como $x \in \langle -\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}] \cup [\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\rangle$ *resulta que* $|x| \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$. *A partir de eso se tiene* $1 > 1 - \frac{1}{x^2} \geq -1$ *y siendo* arcsin *creciente obtenemos*

$$-\frac{\pi}{2} = \arcsin(-1) \leq \arcsin\left(1-\frac{1}{x^2}\right) < \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$$

De donde, $\mathrm{Rang}(g) = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$.

Ejemplo 5.14.3

Hallar el dominio y el rango de la función

$$k(x) = \frac{\arcsin(2x)}{\arccos(2x)} \tag{5.116}$$

Solución. *Observe que*

$$\begin{aligned} \arccos(2x) = 0 &\iff 2x = \cos 0 = 1 \wedge 2x \in [-1, 1] \\ &\iff x = \frac{1}{2} \wedge x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \end{aligned}$$

Consecuentemente, $\mathrm{Dom}(k) = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$.
Siendo

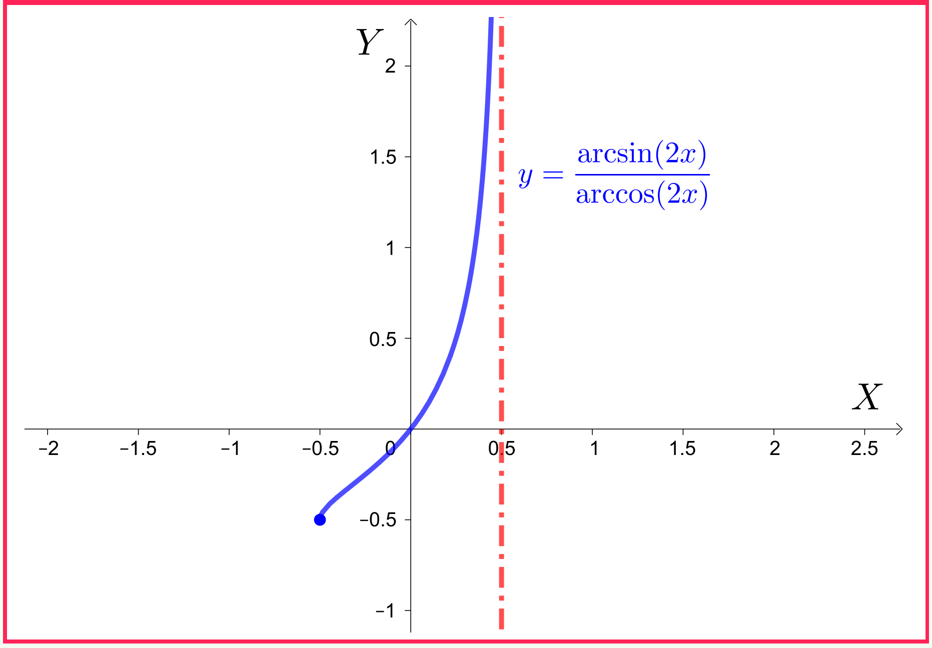
$$y = \frac{\arcsin(2x)}{\arccos(2x)} = \frac{\frac{\pi}{2} - \arccos(2x)}{\arccos(2x)} = \frac{\pi}{2\arccos(2x)} - 1$$

tenemos para todos los valores de $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$, *se cumple*

$$\begin{aligned} 0 < \arccos(2x) \leq \pi &\Longrightarrow \frac{1}{\arccos(2x)} \geq \frac{1}{\pi} \\ &\Longrightarrow \frac{\pi}{2\arccos(2x)} \geq \frac{1}{2} \\ &\Longrightarrow \frac{\pi}{2\arccos(2x)} - 1 \geq -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Desde el último desigualdad, $\mathrm{Rang}(k) = [-\frac{1}{2}, +\infty\rangle$.

Figura 5.69: Gráfica de $y = \frac{\arcsin(2x)}{\arccos(2x)}$.



5.15. Ejercicios propuestos

Tarea para casa:

✍1. Sean $A = \{e, f, g\}$, $B = \{4, 5, 6\}$ y $C = \{4, 5, 6, 7\}$. Determine cada uno de los siguientes conjuntos:

a) $B \times C$

b) $A \times (B \cup C)$

c) $A \times (B \cap C)$

d) $(A \times B) \cup (A \times C)$

e) $(A \times B) \cap (A \times C)$

f) $A \times (B \times C)$

✍2. Sean las relaciones:
$\mathcal{R}_1 = \{(1, 1), (-1, 5), (-1, 0), (0, 2), (3, -2), (8, 2), (4, 2), (5, 6), (3, -1), (9, 8)\}$ y $\mathcal{R}_2 = \{(-2, 3), (2, 0), (-1, 5), (8, 9), (7, 5), (6, 7), (8, 2), (2, 4), (-2, 3)\}$.
Hallar $\mathrm{Dom}\left(\mathcal{R}_1^{-1} - \mathcal{R}_2\right) \cap \mathrm{Dom}\left(\mathcal{R}_1 - \mathcal{R}_2^{-1}\right)$

✍3. Demuestre las siguientes afirmaciones:

$$x \in X \wedge y \in Y \Longrightarrow (x, y) \in \mathcal{P}[\mathcal{P}(X \cup Y)]$$
$$X \times Y = \{z : z \in \mathcal{P}[\mathcal{P}(X \cup Y)] \wedge \exists x \in X, \exists y \in Y, z = (x, y)\}$$

✍4. Demuestre que:

a) $B \subset C \Longrightarrow A \times B \subset A \times C$

b) $A \subset C \wedge B \subset D \Longrightarrow A \times B \subset C \times D$

c) $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$

d) $A \times A = B \times B \Longrightarrow A = B$

✍5. Sean $A \neq \emptyset$ y $B \neq \emptyset$. Demuestre que:

$$A \subset B \wedge C \subset D \Longleftrightarrow A \times C \subset B \times D$$

✍6. Considere las relaciones:

$$\mathcal{R}_1 = \{(M, M), (L, N), (O, P), (N, P), (N, N), (R, S), (S, S)\}$$
$$\mathcal{R}_2 = \{(L, L), (O, P), (M, S), (N, R), (S, S), (M, P), (M, S)\}$$

Hallar $\mathrm{Dom}(\mathcal{R}_1) \cap \mathrm{Dom}(\mathcal{R}_2) - \mathrm{Rang}(\mathcal{R}_1) \cap \mathrm{Rang}(\mathcal{R}_2^{-1})$.

✍7. Calcular:

$$M = \frac{[\![3.5]\!] + 2[\![-2.5]\!] + [\![7]\!]}{[\![2.1]\!] + [\![-3.5]\!]}$$

8. Hallar:

$$E = \sqrt{\sqrt{\sqrt{5[\![5.99]\!] + 3[\![-2.58]\!]} + [\![5.5]\!]} + [\![-1.6]\!]}$$

9. Para cada de las siguientes relaciones en $\mathbb{Z}$, verificar si es una relación de equivalencia o no.

a) $\mathcal{R}_1 = \{(x,y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} : x + y < 2\}$

b) $\mathcal{R}_2 = \{(x,y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} : x = y\}$

c) $\mathcal{R}_3 = \{(x,y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} : x + y \text{ es impar}\}$

d) $\mathcal{R}_4 = \{(x,y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} : x = -y \vee x = y\}$

e) $\mathcal{R}_5 = \{(x,y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} : x^2 + y^2 > 0\}$

f) $\mathcal{R}_6 = \{(x,y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} : x \text{ es múltiplo de } y\}$

10. Determinar dominio y rango de las siguientes relaciones:

a) $\mathcal{R}_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 = 4y\}$

b) $\mathcal{R}_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + 2y = 8\}$

c) $\mathcal{R}_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \sqrt{9 - x^2}\}$

d) $\mathcal{R}_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = [\![x - 2]\!] + 1\}$

e) $\mathcal{R}_5 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = (x-2)^2 + 1\}$

f) $\mathcal{R}_6 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = |x-1| + |x+6|\}$

g) $\mathcal{R}_7 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq |2x-1| - |x-8|\}$

h) $\mathcal{R}_8 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |y-1| + |x+2| < 1\}$

i) $\mathcal{R}_9 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |y| - |x+2| < 3, x + y < 5\}$

j) $\mathcal{R}_{10} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sin(y) \leq x - y, -2 < x < 2\}$

k) $\mathcal{R}_{11} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| - y > 2, x + y \geq 1\}$

11. En las siguientes relaciones de $X = \{a,b,c,d,e,f,g\}$ al $Y = \{A,B,C,D,E,F\}$, señale cuáles son funciones.

a) $\mathcal{R}_1 = \{(a,B),(b,B),(c,D),(e,B),(f,E)\}$

b) $\mathcal{R}_2 = \{(a,A),(b,D),(b,B),(c,F),(e,B),(f,C)\}$

c) $\mathcal{R}_3 = \{(a,B),(b,B),(c,C),(e,E),(f,F)\}$

d) $\mathcal{R}_4 = \{(a,A),(b,B),(c,C),(e,E),(f,E),(g,D),(a,B)\}$

e) $\mathcal{R}_5 = \{(b,B),(c,B),(b,D),(f,B),(g,E),(a,F),(e,B)\}$

12. Demostrar que : si para todo número real $\lambda \geq 0$,

$$H_\lambda = \{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} : x^2 + y^2 \leq r\}$$

entonces $\bigcap_{\lambda\geq 0} H_\lambda = \{(0,0)\}$ y $\bigcup_{\lambda\geq 0} H_\lambda = \mathbb{R}^2$.

✍**13.** Sean $f(x)=\begin{cases} -3 & \text{si } x<-5,\\ 1 & \text{si } -5\leq x<0,\\ 20 & \text{si } x\geq 0\end{cases}$ y $g(x)=\begin{cases} 4 & \text{si } x\leq 0,\\ 1 & \text{si } 0<x<4,\\ -3 & \text{si } x\geq 4\end{cases}$ Hallar:

$$K=\frac{f(-5)+f(0)}{g(4)+g(2)+g(3)+g(0)}$$

✍**14.** Sean $h(x)=\begin{cases} 2x^2-3 & \text{si } x<-1,\\ 1-x & \text{si } x\geq -1\end{cases}$ y $j(x)=\begin{cases} [\![x-1]\!] & \text{si } x<2,\\ |-x|+1 & \text{si } x\geq 2\end{cases}$ Calcule:

$$L=\frac{(h+j)(2)+h(-2)+j(-3.2)+h(-1)}{j(1.2)+h(2)+2}$$

✍**15.** Determinar dominio de cada una de las siguientes funciones:

a) $f_1(x)=\sqrt{x^2+5x-24}$

b) $f_2(x)=\sqrt[4]{x^2-8x-9}+\sqrt[4]{x^2-3x-40}$

c) $f_3(x)=\left[\!\!\left[\dfrac{x^2-x-3}{x+7}\right]\!\!\right]$

d) $f_4(x)=\left[\!\!\left[[\![\sqrt{x^2-16}]\!]\right]\!\!\right]$

e) $f_5(x)=\dfrac{[\![9-x^2]\!]+2|x-2|}{[\![x-3]\!]}$

f) $f_6(x)=\sqrt{[\![x^2-25]\!]-|x+2|}$

✍**16.** Determinar rango de cada una de las siguientes funciones:

a) $g_1(x)=\sqrt{33+8x-x^2}$

b) $g_2(x)=\left|x^2\left[\!\!\left[\dfrac{x-8}{4}\right]\!\!\right]-9\right|$

c) $g_3(x)=\operatorname{sgn}\left(x^2-4x-32\right)+\left[\!\!\left[\dfrac{2x-8}{x+1}\right]\!\!\right]$

✍**17.** Use contracción, alargamiento y translación de funciones elementales para graficar las siguientes funciones:

a) $f_1(x)=3(x-1)^2-7$

b) $f_2(x)=0.25(x-2)^2+4$

c) $f_3(x)=-|x+2|+7$

d) $f_4(x)=2|1-x|+|x|$

e) $f_5(x)=|2x^2-8x+18|$

f) $f_6(x)=-e^x+2$

g) $f_7(x)=0.5\sin(2x-10)$

h) $f_8(x)=-2\ln(x-4)+6$

i) $f_9(x)=\text{Log}_2(x-1)+9$

j) $f_{10}(x) = |2\operatorname{Log}_3(x^2 - 8x - 7)| + 0.25$

✍**18.** Graficar las siguientes funciones:

a) $h_1(x) = \operatorname{sgn}(x^2 - 9) + [\![x - 2]\!]$

b) $h_2(x) = [\![1 - x]\!]$

c) $h_3(x) = [\![x]\!] + [\![-x + 1]\!]$

d) $h_4(x) = \left[\!\!\left[[\![\sqrt{x - 3}]\!] \right]\!\!\right]$

e) $h_5(x) = [\![1 - x]\!] + |x - 1|$

f) $h_6(x) = \begin{cases} -|x + 10| + 20 & \text{si} \quad x \leq -2, \\ ||x^2 - 4x + 20| - 20| & \text{si} \quad -2 < x \leq 2, \\ 2x & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$

g) $h_7(x) = \begin{cases} |2 - x| + |3x - 1| & \text{si} \quad x \geq 1, \\ x^2 - x + 1 & \text{si} \quad 1 < x \leq 2, \\ [\![x - 1]\!] & \text{si} \quad 2 < x \leq 5, \\ [\![|x + 1| - 4]\!] & \text{si} \quad x > 5 \end{cases}$

✍**19.** Determinar el dominio, el rango y la gráfica de la función:

$$L(x) = \begin{cases} [\![x]\!]^2 - [\![x]\!] + 2 & \text{si} \quad 0 < x \leq 4, \\ \sqrt{9 + x^2} + 3 & \text{si} \quad 4 < x \leq 6 \\ -4x + 2 & \text{si} \quad -2 < x \leq 0 \end{cases}$$

✍**20.** Sea $H(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{x}}}}$. Determine f, g, h y j tales que $H = f \circ g \circ (h + j)$.

✍**21.** Verificar si cada una de las siguientes funciones es uno a uno (inyectiva):

a) $f(x) = 3 - 2x$

b) $g(x) = x^3 - x + 1$

c) $h(x) = \dfrac{1}{(x - 1)^2}$

d) $j(x) = 1 - \sqrt{x - 2}$

e) $r(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

f) $s(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1}$

✍**22.** Sea $h : [0, +\infty\rangle \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $h(x) = \dfrac{3}{2 + x^4}$. Demuestre que h, es inyectiva.

✍**23.** Pruebe que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) La función $f : X \longrightarrow Y$, es sobreyectiva;

b) Para todo $y \in Y$, $f^{-1}(y) \neq \emptyset$;

c) Para cada $c \in Y$, la ecuación $f(x) = c$, para valores $x \in X$, tiene al menos una solución.

✍**24.** Sea $p : \mathbb{R} \longrightarrow [-2, 1\rangle$, dada por $p(x) = \dfrac{x^3 - 2x}{x^3 + x}$. ¿La función p, es sobreyectiva? Justifique su respuesta.

✍**25.** Sea $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$g(x) = \begin{cases} 4 - x & \text{si } x \geq 0, \\ (x-2)^2 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Demuestre que g es biyectiva. ¿Qué es g^{-1}?

✍**26.** Sea $j : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $j(x) = -2[\![x]\!] + \cos[\pi([\![x]\!] - x)]$. Demuestre que j, es inyectiva.

✍**27.** Demuestre las siguientes afirmaciones:

a) Si $x > \sqrt{2} + 1$ entonces $\dfrac{x+1}{x-1} < \sqrt{2} + 1$.

b) Si $X = \langle \sqrt{2} + 1, +\infty\rangle$ y $Y = \langle -\infty, 2\sqrt{2} + 2\rangle$ entonces la función $f : X \longrightarrow Y$, dada por

$$f(x) = \frac{1 + x^2}{x - 1},$$

es inyectiva.

✍**28.** Encontrar inversas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{3x - 12}{x - 3}$

b) $f(x) = \dfrac{2x + 5}{4x - 12}$

c) $g(x) = 4 - \sqrt{x - 1}$

d) $h(x) = (x + 2)^3$

e) $j(x) = 1 + \sqrt{x - 8}$

✍**29.** Pruebe que: la aplicación $g : \mathbb{N} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{Z}$, dada por $g(x) = (-1)^x \left[\!\!\left[\dfrac{x}{2}\right]\!\!\right]$, es una biyección y obtener g^{-1}.

✍**30.** Demuestre que la aplicación $k : \mathbb{R} - \{-1, 1\} \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $k(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 1}{x^2 - 1}$, es sobreyectiva. Encontrar el conjunto $\{x \in \mathbb{R} : k(x) = 0.5\}$.

✍**31.** Considere $q : [-2, 1] \longrightarrow [-1, 2]$, dada por $q(x) = \dfrac{x^2 - 4x}{x^2 + 2}$. Pruebe que q, es biyectiva.

✍**32.** Considere $r(x) = \dfrac{a^x - a^{-x}}{2}$, con $a > 1$.

a) Encontrar el dominio de r.

b) Hallar la inversa de r.

✍**33.** Demuestre que la función $k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $k(x) = xe^{x^2+1}$, es biyectiva.

✍**34.** Sea $g(x) = \dfrac{2^x}{2^x - 4}$. Determine:

a) dominio y rango de g,

b) inversa de g.

✍**35.** Considere $j(x) = \dfrac{3^{3x} + 3^{-x}}{3^x}$.

a) Hallar el rango de j.

b) Encontrar la inversa de j.

✍**36.** Dada la función $f : \mathbb{R} - \{0, 2\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{0, 2\}$, por $f(x) = 2 - \dfrac{4}{x}$, ¿Cómo está dada $f \circ f \circ f$?

✍**37.** Considere $h(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 15}$ y $g(x) = \begin{cases} 5x + 1 & \text{si} \quad x < -1, \\ 2 & \text{si} \quad x \geq -1. \end{cases}$ Hallar los dominios de $g \circ h$ y $h \circ g$, y sus reglas de correspondencia.

✍**38.** Sean $f : X \longrightarrow Y$ y $g : Y \longrightarrow Z$ funciones. Pruebe las siguientes afirmaciones:

a) Si f y g son sobreyectivas entonces $g \circ f$, es sobreyectiva.

b) Si f y g son inyectivas entonces $g \circ f$, es inyectiva.

c) Si f y g son biyectivas entonces $g \circ f$, es biyectiva.

✍**39.** Sea $f : X \longrightarrow Y$ y $g : Y \longrightarrow Z$ funciones. Pruebe que:

a) Si $g \circ f$ es sobreyectiva, entonces g es sobreyectiva.

b) Si $g \circ f$ es inyectiva, entonces f es inyectiva.

Dar contraejemplo, para demostrar que las recíprocas de cada una de las afirmaciones a) y b), no es verdadero.

✍**40.** Sean j y h funciones definidas por

$$j(x) = \begin{cases} |x + 3| - 1 & \text{si} \quad -4 < x \leq 0, \\ \frac{2-2x}{x-3} & \text{si} \quad 1 \leq x \leq 4 \wedge x \neq 3, \\ 4\,\mathrm{sgn}(-x) & \text{si} \quad x = 3 \vee |x| > 4. \end{cases}$$

y

$$h(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{4x+4} & \text{si} \quad x < -6 \vee x > 2, \\ \mathrm{sgn}(x^2) & \text{si} \quad -1 < x \leq 2. \end{cases}$$

Hallar $h \circ j$ y $j \circ h$, y sus rangos.

✍**41.** Sean $f(x) = \begin{cases} [\![x-2]\!] & \text{si} \quad x \in \langle 0, 5], \\ (x+3)^2 & \text{si} \quad x \in \langle -8, -2], \\ \sqrt{x^2-4} & \text{si} \quad x \in \langle -2, 0\rangle \cup \langle 5, 9\rangle. \end{cases}$ y $g(x) = \begin{cases} 2x-1 & \text{si} \quad x < 0, \\ |x-2| & \text{si} \quad 0 < x < 1, \\ x^2-1 & \text{si} \quad x > 1. \end{cases}$ Hallar $f \circ g$ y $g \circ f$, y sus dominios.

✍**42.** Sean $f(x) = \begin{cases} -2x+4 & \text{si } x < -7, \\ 1-x+|x| & \text{si } -7 \leq x < 0, \\ \sqrt{x+8} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} 3|x-4| & \text{si } x \leq 0, \\ [\![1-x]\!] & \text{si } 0 < x < 2, \\ x^2-2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ y $h(x) = \begin{cases} 2-x & \text{si } x \leq 0, \\ 1 & \text{si } 0 < x < 3, \\ -|x-1| & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$ Hallar $f \circ g \circ h$ y $h \circ g \circ f$, y sus dominios.

✍**43.** Determine asíntota de cada una de las funciones:

a) $f_1(x) = \dfrac{x^2+12x+27}{x+4}$

b) $f_2(x) = \dfrac{x^2+12x+35}{x-9}$

c) $f_3(x) = \dfrac{x^6-x^5-x+12}{x^3-x^2+x-1}$

d) $f_4(x) = \dfrac{x^3-x^2-9}{x^2+4x+4}$

e) $f_5(x) = \dfrac{5x^3+2x-3}{6x^3-7x+1}$

✍**44.** Sea la función $h(x) = \dfrac{d^x}{d^x+1}$, $d > 1$.

a) Encontrar el dominio de $h(x)$.

b) Hallar el rango de $h(x)$.

c) Graficar h, para $d = 5$.

✍**45.** Graficar, encontrar dominio y rango de las siguientes funciones:

a) $g_1(x) = \text{Log}_2(x^2-16)$

b) $g_2(x) = \text{Log}_4(\sqrt{27-x^3})$

c) $g_3(x) = \text{Log}_8(\sqrt{[\![1-x^2]\!]})$

d) $g_4(x) = \text{Log}_{11}(x^2-25) + \text{Log}_{12}(144-x^2)$

e) $g_5(x) = \text{Log}_{20}([\![5x+9]\!]+6)$

f) $g_6(x) = \text{Log}_3(e^{x-3}-x+3)+10$

g) $g_7(x) = \sqrt{\text{Log}\left(\dfrac{5x-x^2}{4}\right)}$

✍**46.** Una empresa intenta dar a conocer un nuevo producto al mayor número de personas posible mediante publicidad televisiva en Lima metropolitana con 2 millones de posibles espectadores. Un modelo para el número de personas S (en millones) que conocen el producto después de t días de publicidad resultó ser

$$S(t) = 2(1 - \lambda e^{-0.037t}).$$

Al inicio conocen 1000 personas sobre publicidad. Gráfica esta función para $t \in [0, 50]$, ¿a qué valor se aproxima S cuando t aumenta sin límite?

✍**47.** En un experimento se contabilizó 243, mosquitos el primer día y se demostró que la cantidad de mosquitos se triplica cada día, ¿en qué día habrá 59049 mosquitos? ¿cuántos mosquitos habrá en el día 12?

✍**48.** Dado el modelo

$$C(t) = I_0 a^{\beta a^{\theta(1-t)}},$$

determina, la cantidad de infectados acumulados desde inicio de la pandemia en el día t. En una ciudad, inicialmente se registró $243I_0$ infectados por Covid-19 y durante los siguientes días tiene comportamiento del modelo C, con parámetros $\beta = 5.0$ y $\theta = -0.25$. Determine a y encuentre la cantidad de infectados por Covid-19, durante los primeros 180 días después de haberse propagando el virus. ¿Qué sucede con el modelo cuando t, es suficientemente grande?

✍**49.** El costo de producción de x artículos viene dado por la ecuación $C(x) = 2x^2 - 400x + 20000$, determinar el número de artículos producidos al costo mínimo así, como dar el costo mínimo.

✍**50.** En la tabla 5.1, se muestran los gastos anuales de ESSALUD (en miles de millones de soles) por parte del gobierno de Perú, para años seleccionados desde 1965. Sea x la representación de los años desde 1965.

Años	Soles(S/.)
1965	23
1975	35
1985	53
1995	104
2005	187
2015	271

Tabla 5.1: Gastos de ESSALUD

a) Encuentra un modelo de regresión exponencial $y = ab^x$, para los datos. Estime (con una aproximación de mil millones) los gastos anuales en 2025.

b) ¿Cuándo se alcanzarán los dos billones de soles de gasto anual?

✍**51.** Los números Fibonacci $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ son definidas por $f_1 = 1$, $f_2 = 1$ y

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \text{ para } n \geq 3.$$

a) Calcular f_5 y f_{13}.

b) Pruebe que: j ésimo número de Fibonacci es dado por:

$$f_j = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^j - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^j\right)$$

✍**52.** Determine $g(f(x))$ y $f(g(x))$, y sus dominios.

a) $f(x) = 14x^3 - 7x$ y $g(x) = x^3 + 9$

b) $f(x) = \sqrt{2x+3}$ y $g(x) = \dfrac{x^2-3}{2}$

c) $f(x) = \dfrac{x+2}{2x-8}$ y $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

d) $f(x) = \sqrt[4]{x^2-9}$ y $g(x) = \sqrt{x^4-7}$

e) $f(x) = \left[\!\left[\dfrac{1-2x}{x}\right]\!\right]$ y $g(x) = \dfrac{1}{[\![x]\!]+2}$

f) $f(x) = \dfrac{|x+2|}{|x-3|}$ y $g(x) = \dfrac{x+2}{|x|}$

g) $f(x) = \dfrac{|x|-8}{x-3|x|}$ y $g(x) = \dfrac{x}{|x|}$

✍**53.** Determine el dominio y el rango de las siguientes funciones:

a) $g_1(x) = \dfrac{\cos(x-\pi)}{\tan x} + \pi$

b) $g_2(x) = \dfrac{\sin(x-4\pi) - \cos(x-9\pi)}{\sin(x-\pi)}$

c) $g_3(x) = \sec(\pi - 2x) + \csc\left(\dfrac{\pi}{2} - 6x\right)$

d) $g_4(x) = |\tan(-2x) - \pi|$

e) $g_5(x) = |\cot(-x) + \tan(x)| + 1$

f) $g_6(x) = -|\sec(8x - 3\pi)| + 3$

g) $g_7(x) = \left|\sin(2x-\pi) - \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)\right|$

h) $g_8(x) = \cos(x) - \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - 2x\right)$

i) $g_9(x) = -\arctan\left(2x - \dfrac{\pi}{2}\right) + 6$

j) $g_{10}(x) = \dfrac{\operatorname{arc\,cos}(x-6)}{\arctan(x-4)}$

k) $g_{11}(x) = \dfrac{\operatorname{arc\,cos}(x-1) - x}{x + \arcsin(x-1)}$

l) $g_{12}(x) = \sin(\sin(\operatorname{arc\,cos}(x-2)))$

m) $g_{13}(x) = \operatorname{arc\,cos}(\sin(x)) - 1$

n) $g_{14}(x) = \dfrac{\arctan(x - 2\pi)}{1 + \arctan(x + \frac{\pi}{2})}$

ñ) $g_{15}(x) = \arctan(x^2 - 12) + 1$

o) $g_{16}(x) = \sin(x^2 - 1) + \cos(x^2 - 4)$

p) $g_{17}(x) = \sqrt{2x - \sin(x - 1)} - 1$

q) $g_{18}(x) = \arccos(x - 2) - \arcsin(x - 2)$

r) $g_{19}(x) = \dfrac{\arctan(x + 1)}{x^2 + \arccos(x - 1)}$

s) $g_{20}(x) = \dfrac{\arccos(4x) + \arcsin(4x)}{\arcsin(4x)}$

✍**54.** Sean $f(x) = 2x^2 - 4x + a$ y $g(x) = x^2 - x + b$, funciones que se intersectan en el punto $(-2, 18)$. Calcular $a + b$ y el otro punto de intersección.

✍**55.** Resolver cada una de las siguientes ecuaciones:

a) $\operatorname{Log}_2 x - \operatorname{Log}_2 32 = -3 \operatorname{Log}_2 16 + \operatorname{Log}_2 4$

b) $\operatorname{Log}_7 6 + \operatorname{Log}_7 x = \dfrac{2}{3} \operatorname{Log}_7 8 + \dfrac{3}{2} \operatorname{Log}_7 9$

c) $\operatorname{Log}_{15}(x + 2) - \operatorname{Log}_{15}(x - 2) = 1$

d) $\operatorname{Log}_8(-5x + 7) - \operatorname{Log}_8(2x - 12) = 2$

e) $\operatorname{Log}_3(x - 1) + \operatorname{Log}_3(x + 3) = 5$

6

Matrices

En este último capítulo, explicamos cómo encontrar solución de sistema de ecuaciones lineales a través de los métodos de eliminación, forma escalonada fila, Gauss Jordan y Cramer y al finalizar el capítulo el estudiante será capaz de encontrar con precisión las soluciones de los ejercicios propuestos de matrices, sistema de ecuaciones lineales y determinantes. Para la teoría de matrices y sistema de ecuaciones lineales se tomó en cuenta los libros [1, 2, 3, 11, 16, 19], y para determinantes los textos [7, 17, 23, 27].

6.1. Definición de una matriz

Definición 6.1.1

Una matriz, es un arreglo rectangular de la forma:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \tag{6.1}$$

Denotamos dicha matriz como $[a_{ij}]$. Ésta matriz se dice que es de orden $n \times m$, o sea, consta de n filas y m columnas.

Ejemplo 6.1.1

Los siguientes arreglos

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 1 & 0 & 3 \\ -5 & 2 & 12 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 & 3 \\ -4 & 5 & 13 & -1 \\ 12 & -6 & 2 & 8 \end{bmatrix} \tag{6.2}$$

son matrices de 3×3 y 3×4, respectivamente.

Matrices de diferentes especies:

ME1). Matriz fila.-es una matriz de una fila con varias columnas. La matriz A es matriz fila con m columnas si,

$$A = \left[\begin{array}{ccccc} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_m \end{array} \right].$$

ME2). Matriz columna.-es una matriz de varias filas y una sola columna. La matriz B, es matriz columna con n filas si,

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

ME3). Matriz nula(cero).-es una matriz cuyas entradas todas son ceros. Es decir, $A = [a_{ij}]$ es nula si, $A = [0]$.

ME4). Matriz cuadrada.-es una matriz que tiene número de filas igual al número de columnas. Es decir,

$$A = [a_{ij}] \text{ es cuadrada } \iff 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$$

ME5). Matriz diagonal.-es una matriz cuadrada y todas sus entradas de la matriz son ceros excepto la diagonal principal. Es decir, $D = [d_{ij}]$ es una matriz diagonal si, sólo si, es cuadrado y $d_{ij} = 0$, para todo i, j, $i \neq j$.

ME6). Matriz identidad.-es una matriz diagonal con entradas en la diagonal principal todas iguales a 1.

$$A = [\delta_{ij}] \text{ es identidad } \iff \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

ME7). Matriz triangular superior.-es una matriz cuadrada y todas sus entradas debajo de la diagonal principal son ceros. Es decir, $A = [a_{ij}]$ es triangular superior si $a_{ij} = 0$, para todo i, j, $i > j$.

ME8). Matriz triangular inferior.-es una matriz cuadrada y todas sus entradas encima de la diagonal principal son ceros. Es decir, A es triangular inferior si $a_{ij} = 0$, para todo i, j, $i < j$.

Definición 6.1.2

Sean $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$ matrices de $n \times m$. Se define:

$$\boxed{A = B \iff a_{ij} = b_{ij}, \forall i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}, \forall j \in \{1, 2, 3, \dots, m\},} \tag{6.3}$$

en este caso, se dice que A y B son matrices iguales.

Ejemplo 6.1.2

Sean $A = \begin{bmatrix} 2 & x+y \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ *y* $B = \begin{bmatrix} x-y & 4 \\ 0 & z \end{bmatrix}$ *matrices iguales. Encontrar* $2x-5y+z$.

Solución.

$$\begin{bmatrix} 2 & x+y \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-y & 4 \\ 0 & z \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} x-y &= 2 \quad (1) \\ x+y &= 4 \quad (2) \\ z &= 1 \quad (3) \end{cases}$$

Sumando ecuaciones (1) y (2), tenemos $2x=6$*, o sea,* $x=3$*; reemplazando en (1) el valor de* x*, se obtiene* $y=1$*. Por lo tanto,*

$$2x-5y+z = 2(3)-5(1)+1 = 2.$$

6.2. Suma de matrices

Definición 6.2.1

Sean $A=[a_{ij}]$ *y* $B=[b_{ij}]$ *matrices de* $n\times m$*. La suma* $A+B$*, se define por:*

$$\boxed{A+B := [a_{ij}+b_{ij}]} \tag{6.4}$$

Ejemplo 6.2.1

Considere $A = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -8 \end{bmatrix}$ *y* $B = \begin{bmatrix} 12 & -7 \\ 23 & 2 \end{bmatrix}$*. Hallar* $A+B$.

Solución.

$$\begin{aligned} A+B &= \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 & -7 \\ 23 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2+12 & 4+(-7) \\ 3+23 & -8+2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 10 & -3 \\ 26 & -6 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Teorema 6.2.1: Propiedades

Sea $M_{n\times m}(\mathbb{R})$*, el conjunto de todas las matrices de* $n\times m$ *con entradas reales. Entonces*

SM1). $A+B=B+A, \forall A,B\in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ *(Conmutativa)*

SM2). $A+(B+C)=(A+B)+C,\ A,B,C\in M_{n\times m}$ *(Asociativa)*

SM3). $\exists![0]\in M_{n\times m}(\mathbb{R}): A+[0]=A, \forall A\in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ *(Existencia y unicidad de* $[0]$*)*

SM4). $\forall A \in M_{n\times m}(\mathbb{R}), \exists! -A \in M_{n\times m}(\mathbb{R}) : A+(-A) = [0]$ *(Existencia y unicidad de $-A$)*

Demostración.
Queda como ejercicio para el lector.

Definición 6.2.2

Sean A y B en $M_{n\times m}(\mathbb{R})$. La resta $A - B$, es definida por:

$$\boxed{A - B := A + (-B)} \tag{6.5}$$

Ejemplo 6.2.2

Considere

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 10 & 9 \\ 5 & -9 & 12 \\ 2 & 8 & 20 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 7 \\ 2 & -3 & 15 \\ 32 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

Hallar $A - B$.
Solución.

$$\begin{aligned} A - B &= \begin{bmatrix} -1 & 10 & 9 \\ 5 & -9 & 12 \\ 2 & 8 & 20 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 & 7 \\ 2 & -3 & 15 \\ 32 & 6 & 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 10 & 9 \\ 5 & -9 & 12 \\ 2 & 8 & 20 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 0 & -7 \\ -2 & +3 & -15 \\ -32 & -6 & -4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1+(-3) & 10+(-0) & 9+(-7) \\ 5+(-2) & -9+(3) & 12+(-15) \\ 2+(-32) & 8+(-6) & 20+(-4) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -4 & 10 & 2 \\ 3 & -6 & -3 \\ -30 & 2 & 16 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

6.3. Producto de matrices

Definición 6.3.1

Sean $A = [a_{ij}]_{n\times m}$ y $B = [b_{il}]_{m\times p}$ matrices. El producto AB, es definido por:

$$\boxed{AB = C,} \tag{6.6}$$

donde, $C = [c_{il}]_{n\times p}$ y $c_{il} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} b_{jl}$.

Ejemplo 6.3.1

Sean las matrices $H = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 7 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ *y* $J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 5 & 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$. *Calcular* HJ.

Solución.

$$\begin{aligned} 1(1) + (-2)(0) + 3(5) &= 16 \\ 1(0) + (-2)(-1) + 3(2) &= 8 \\ 1(-1) + (-2)2 + 3(-1) &= -8 \\ 1(3) + (-2)(0) + 3(2) &= 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0(1) + 7(0) + (-2)5 &= -10 \\ 0(0) + 7(-1) + (-2)2 &= -11 \\ 0(-1) + 7(2) + (-2)(-1) &= 16 \\ 0(3) + 7(0) + (-2)2 &= -4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (-1)(1) + 3(0) + 1(5) &= 4 \\ (-1)(0) + 3(-1) + 1(2) &= -1 \\ (-1)(-1) + 3(2) + 1(-1) &= 6 \\ (-1)(3) + 3(0) + 1(2) &= -1 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$HJ = \begin{bmatrix} 16 & 8 & -8 & 9 \\ -10 & -11 & 16 & -4 \\ 4 & -1 & 6 & -1 \end{bmatrix}$$

Teorema 6.3.1

MP1). $\forall A \in M_{n\times m}(\mathbb{R}), \forall B \in M_{m\times p}, \forall C \in M_{p\times q}$ *se tiene*

$$A(BC) = (AB)C \tag{6.7}$$

MP2). $\forall A \in M_{n\times m}(\mathbb{R}), \forall B, C \in M_{m\times p}(\mathbb{R})$ *se obtiene*

$$A(B + C) = AB + AC \tag{6.8}$$

MP3). $\forall D, E \in M_{m\times p}(\mathbb{R}), \forall F \in M_{p\times q}(\mathbb{R})$ *se tiene*

$$(D + E)F = DF + EF \tag{6.9}$$

MP4). $I_nA = AI_n = A$, I_n *matriz identidad de* $n \times n$ *y* A *también de* $n \times n$.

Solución. *Queda como ejercicio para el lector.*

Ejemplo 6.3.2

¿Es verdad $AB = BA$?
Solución. *La respuesta es No. Veamos un contraejemplo:*
consideremos $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ *y* $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. *Luego,*

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}$$
$$BA = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Lo cual da $AB \neq BA$.

Ejemplo 6.3.3

¿Vale la siguiente afirmación: $A \neq 0 \wedge B \neq 0 \implies AB \neq 0$? Justifique su respuesta.
Solución.
Considere las matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$ *y* $B = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, *que no son nulas.*
Entonces
$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
La afirmación es falsa.

Ejemplo 6.3.4

¿La ley cancelación: $AB = AC \implies B = C$, funciona para matrices? Justifique su respuesta.
Solución. *Consideremos* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ *y* $C = \begin{bmatrix} -4 & 9 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.
Observe las multiplicaciones:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$$
$$AC = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 9 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$$

Sin embargo, $B \neq C$. Por lo tanto, no funciona la propiedad cancelativa para matrices.

6.4. Matrices cuadradas especiales

Definición 6.4.1

Sea $A = [a_{ij}]$ una matriz cuadrada. Se define la matriz transpuesta:

$$A^T = [a_{ji}] \tag{6.10}$$

Ejemplo 6.4.1

Considere la matriz $K = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 23 & 9 \\ 0 & 3 & -8 & 10 \\ -8 & 3 & 11 & 26 \\ 1 & 0 & -7 & 9 \end{bmatrix}$. *Calcular* K^T.

Solución.

$$K^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -8 & 1 \\ -4 & 3 & 3 & 0 \\ 23 & -8 & 11 & -7 \\ 9 & 10 & 26 & 9 \end{bmatrix}$$

Definición 6.4.2

$$\boxed{A = [a_{ij}] \text{ es matriz simétrica} \Longleftrightarrow A = A^T} \tag{6.11}$$

Ejemplo 6.4.2

¿La matriz

$$L = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 8 & 0 \\ -4 & 8 & 7 & 9 \\ 8 & 7 & 10 & 3 \\ 0 & 9 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

es simétrica?

Solución.

La matriz L, si es simétrica ya que $L = L^T$.

Definición 6.4.3

$$\boxed{A \text{ es matriz periódica} \Longleftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z}^+ / A^{n+1} = A} \tag{6.12}$$

n, es el periodo de A.

Ejemplo 6.4.3

Considere

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{6.13}$$

Determine periodo de la matriz E.

Solución.

$$E^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E^3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = E$$

$n = 2$ es el periodo de E.

Definición 6.4.4

Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Se define:

$$\boxed{A \text{ matriz } \textit{idempotente} \iff \exists 2 \in \mathbb{Z}^+ \text{ tal que } A^2 = A}$$

Ejemplo 6.4.4

Considere $R = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. ¿Es idempotente la matriz R?

Solución.

R si es idempotente ya que,

$$R^2 = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = R$$

Definición 6.4.5

Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Se define:

$$\boxed{A \text{ matriz } \textit{nilpotente} \iff \exists m \in \mathbb{Z}^+ \text{ tal que } A^m = [0]}$$

Ejemplo 6.4.5

Sea la matriz $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. ¿La matriz B, es nilpotente?

Solución.

La matriz B, si es nilpotente pues

$$B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Definición 6.4.6

Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Se define:

$$\boxed{A \text{ matriz } \textit{involutiva} \iff \exists 2 \in \mathbb{Z}^+ \text{ tal que } A^2 = I_n}$$

Ejemplo 6.4.6

Considere $H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. *¿La matriz H, es involutiva?*

Solución.

La matriz H, es involutiva ya que

$$H^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_4$$

6.5. Inversa de una matriz

Definición 6.5.1

Una matriz está en forma escalonada fila si cumple:

1. *Las filas formadas por ceros están en la parte inferior.*
2. *En cada fila no nula, la primera entrada no nula (llamada entrada principal) está en una columna a la izquierda de cualquier entrada principal por debajo de ella.*

Una matriz en forma escalonada fila es un arreglo que tiene la siguiente forma

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & * & 0 & * & 0 & * & * & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 & * & * & * & * & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & 0 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

en el que, cada entrada debajo del escalón es 0, todas las entradas marcadas con $\circledast$ *son distintas de cero, y el escalón desciende siempre en una fila; Los asteriscos* $(*)$ *en cada esquina del escalón, se llamarán entradas principales.*

Ejemplo 6.5.1

Considere las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 7 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 & 4 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

¿Cuáles de las matrices están en forma escalonada fila?

Solución.

Las matrices A y C, están en forma escalonada mientras B no lo es.

Definición 6.5.2

Operaciones elementales filas son:

OF1). Intercambio de filas: $\underrightarrow{f_i \longleftrightarrow f_j}$;

OF2). Multiplicación por un número: $\underrightarrow{\lambda f_i}$, $\lambda \neq 0$;

OF3). Múltiplo de una fila más otra fila: $\underrightarrow{\lambda f_i + f_j}$, $\lambda \neq 0$.

Ejemplo 6.5.2

Determinar la matriz H, en *forma escalonada fila*:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Solución. *Aplicando operaciones elementales con filas tenemos*

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[f_4 - 2f_1]{f_1 + f_3} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[f_4 + f_2]{f_3 - 2f_2} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{f_4 + 3f_3}$$

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

de donde la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

está en forma escalonada fila de H.

Definición 6.5.3

Una matriz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ tiene inversa*, si existe una matriz $B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que*

$$AB = BA = I_n \tag{6.14}$$

La matriz B, es la inversa de A y es denotado por A^{-1}.

Ejemplo 6.5.3

Determine la inversa de $A = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$, con $xw - zy \neq 0$.

Solución. *Consideremos*

$$B = \begin{bmatrix} \frac{w}{xw-zy} & \frac{-y}{xw-zy} \\ \frac{-z}{xw-zy} & \frac{x}{xw-zy} \end{bmatrix}$$

en seguida

$$AB = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{w}{xw-zy} & \frac{-y}{xw-zy} \\ \frac{-z}{xw-zy} & \frac{x}{xw-zy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$BA = \begin{bmatrix} \frac{w}{xw-zy} & \frac{-y}{xw-zy} \\ \frac{-z}{xw-zy} & \frac{x}{xw-zy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por consiguiente,

$$A^{-1} = B = \frac{1}{xw - zy} \begin{bmatrix} w & -y \\ -z & x \end{bmatrix}.$$

Ejemplo 6.5.4

Determinar A^{-1}, donde $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

Solución.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{f_2 - f_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{3} & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{3} f_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \xrightarrow{f_1 + f_2} \\ \\ \xrightarrow{f_3 - f_2} \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{4} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{4} f_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{4} \end{array}\right] \begin{array}{c} \xrightarrow{f_1 - f_3} \\ \xrightarrow{f_2 + f_3} \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & 0 & \frac{7}{12} & \frac{5}{12} & -\frac{1}{4} \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{4} \end{array}\right]$$

Por lo tanto,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{7}{12} & \frac{5}{12} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{12} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Teorema 6.5.1

Sean λ un escalar no cero y A matriz tiene inversa. Entonces:

Iv1) A^{-1} *tiene inversa y* $(A^{-1})^{-1} = A$.

Iv2) *La matriz* (λA) *tiene inversa y* $(\lambda A)^{-1} = \dfrac{1}{\lambda} A^{-1}$.

Iv3) A^T *tiene inversa y* $\left(A^T\right)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Demostración. *Ejercicio para el lector.*

Teorema 6.5.2

Si A y B tienen inversas entonces AB tiene inversa y $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
Demostración.

$$\begin{aligned} (AB)\left(B^{-1}A^{-1}\right) &= [A\left(BB^{-1}\right)]A^{-1} = (AI)A^{-1} = AA^{-1} = I \\ \left(B^{-1}A^{-1}\right)(AB) &= [B^{-1}\left(A^{-1}A\right)]B = \left(B^{-1}I\right)B = B^{-1}B = I \end{aligned}$$

De donde, AB tiene inversa y $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Definición 6.5.4

Sea A una matriz de $n \times n$. Se definen:

$$\boxed{A^0 := I,} \tag{6.15}$$

donde I es una matriz identidad de $n \times n$.
Para todo $k \in \mathbb{Z}^+$, la potencia A^k, de A inductivamente es dada como

$$\boxed{A^k := A\left(A^{k-1}\right)} \tag{6.16}$$

Además, si A tiene inversa entonces para cada $k \in \mathbb{Z}^-$ se define

$$\boxed{A^k := \left(A^{-1}\right)^{-k}.} \tag{6.17}$$

Teorema 6.5.3

Para todo $k, l \in \mathbb{Z}$. Si A^k y A^l, están definidas entonces

$$A^{k+l} = A^k A^l \tag{6.18}$$

Demostración. *Ejercicio para el lector.*

6.6. Sistema de ecuaciones lineales

Definición 6.6.1

Una ecuación lineal tiene la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n = b, \tag{6.19}$$

donde $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ y b constantes. Las variables $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ son llamadas incógnitas.

Ejemplo 6.6.1

La ecuación

$$3x_1 - 5x_2 + 7x_3 - 23x_4 + 8x_5 - 2x_6 = 23, \tag{6.20}$$

es una ecuación lineal de seis variables.

Definición 6.6.2

Un sistema lineal de ecuaciones (SEL), es una colección finita de ecuaciones lineales. Una colección finita puede ser de la forma:

$$(SEL)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1m}x_m & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2m}x_m & = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3m}x_m & = b_3 \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nm}x_m & = b_n \end{cases} \tag{6.21}$$

Este sistema ecuaciones lineales consta de n ecuaciones y m variables. En forma matricial tenemos:

$$Ax = b, \tag{6.22}$$

donde $A = [a_{ij}]$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$, $b = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & \ldots & b_n \end{bmatrix}^T$.
La matriz aumentada del sistema de ecuaciones lineales está dada por la matriz:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2m} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3m} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n4} & \ldots & a_{nm} & b_n \end{array}\right] \tag{6.23}$$

El vector $(s_1, s_2, s_3, ..., s_m)$, es una solución del sistema lineal (6.21) si, satisface todas las ecuaciones que conforman el sistema lineal. Y el conjunto solución (CS), es un conjunto, cuyos elementos son todas las soluciones del sistema lineal.

6.7. Método de eliminación

Definición 6.7.1

Las siguientes operaciones con ecuaciones son válidas:

OFE1). $\underrightarrow{f_i \longleftrightarrow f_j}$: denota intercambio de la ecuación (i) con la ecuación (j).

OFE2). $\underrightarrow{\lambda f_i}$, $\lambda \neq 0$: denota multiplicación de $\lambda \neq 0$, a la ecuación (i).

OFE3). $\underrightarrow{f_i + \theta f_j}$, $\theta \neq 0$: denota suma de la ecuación (i), más $\theta \neq 0$ veces la ecuación (j).

Ejemplo 6.7.1

Resolver

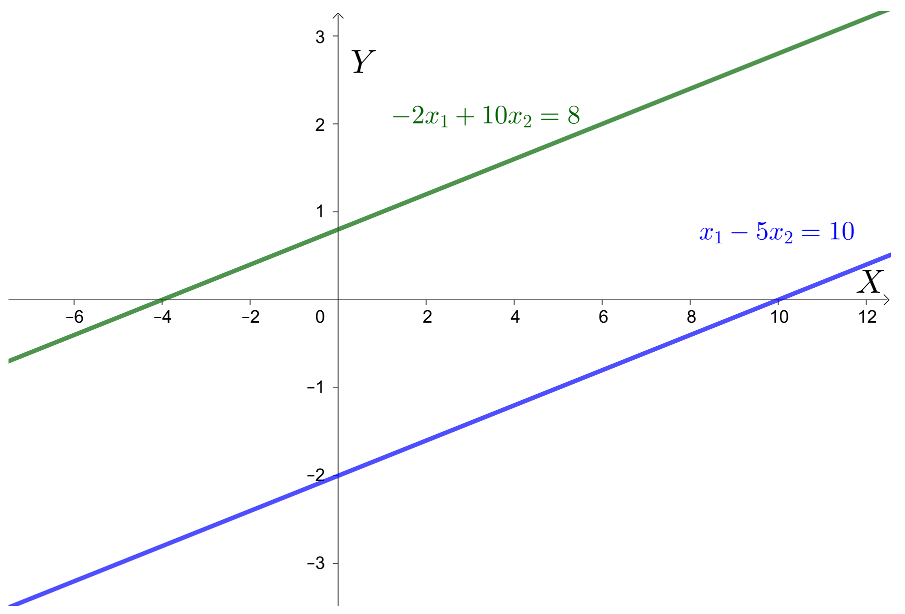
$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 & = & 10 \\ -2x_1 + 10x_2 & = & 8 \end{cases} \tag{6.24}$$

Solución.

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 & = & 10 \\ -2x_1 + 10x_2 & = & 8 \end{cases} \quad \underrightarrow{f_1 + 2f_2} \quad \begin{cases} x_1 - 5x_2 & = & 10 \\ 0 & = & 28 \end{cases}$$

El resultado $0 = 28$, es falso y por lo tanto, el sistema lineal no tiene solución.

Figura 6.1: Rectas paralelas



En la figura 6.1, las rectas son paralelas, o sea, no existe punto de intersección y esto confirma que no hay solución.

Ejemplo 6.7.2

Resolver

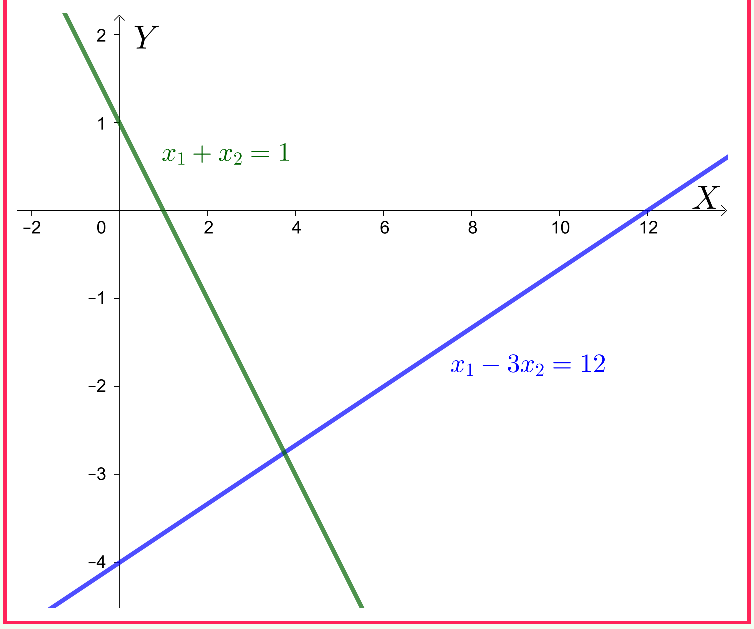
$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 &= 12 \\ x_1 + x_2 &= 1 \end{cases} \tag{6.25}$$

Solución.

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 &= 12 \\ x_1 + x_2 &= 1 \end{cases} \xrightarrow{f_2 - f_1} \begin{cases} x_1 - 3x_2 &= 12 & (1) \\ 4x_2 &= -11 & (2) \end{cases} \tag{6.26}$$

De (2), $x_2 = -\dfrac{11}{4}$. *Ahora en* (1), $x_1 - 3\left(-\dfrac{11}{4}\right) = 12$, *o sea,* $x_1 = 12 - \dfrac{33}{4} = \dfrac{15}{4}$.

Figura 6.2: Intersección de rectas.



En la figura 6.2, las rectas se intersectan en un solo punto y esto significa que el sistema lineal tiene solución única. Es decir, la solución está dada por punto de intersección:

$$\text{CS} = \left\{ \left(\frac{15}{4}, -\frac{11}{4} \right) \right\}$$

Ejemplo 6.7.3

Resolver:

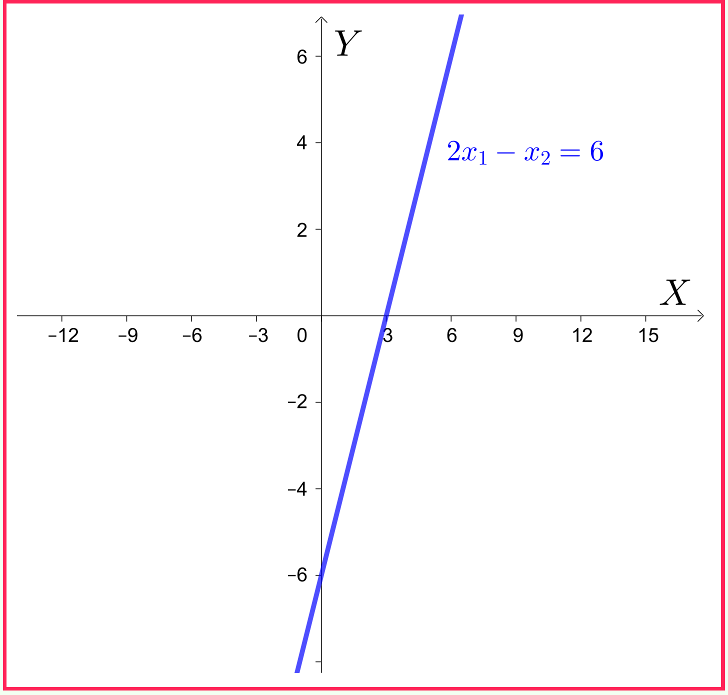
$$\left\{ \begin{array}{rcr} 2x_1 - x_2 & = & 6 \\ -6x_1 + 3x_2 & = & -18 \end{array} \right. \tag{6.27}$$

Solución.

$$\left\{ \begin{array}{rcr} 2x_1 - x_2 & = & 6 \\ -6x_1 + 3x_2 & = & -18 \end{array} \right. \xrightarrow{f_1 + 3f_2} \left\{ \begin{array}{rcrl} 2x_1 - x_2 & = & 6 & (1) \\ 0 & = & 0 & (2) \end{array} \right.$$

El sistema reducido se reduce a sola ecuación porque una de las ecuaciones es múltiple de otra. El sistema lineal tiene infinitas soluciones, su conjunto solución está formado por todos los puntos que se encuentran en la recta $2x_1 - x_2 = 6$.

Figura 6.3: La recta



En los ejemplos 6.7.2 y 6.7.3, los sistemas tienen al menos una solución, en general los sistemas lineales pueden tener soluciones o quizás ninguna solución como en el Ejemplo 6.7.1. El sistema de ecuaciones lineales en general es

S1) consistente determinado si tiene una única solución.

S2) consistente indeterminado si tiene infinitas soluciones.

S3) inconsistente si no tiene solución.

Ejemplo 6.7.4

Resolver

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + x_2 - 3x_3 & = & 12 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 & = & -3 \end{array} \right. \tag{6.28}$$

Solución.

$$\left\{ \begin{array}{rl} x_1 + x_2 - 3x_3 & = 12 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 & = -3 \end{array} \right. \xrightarrow{f_1 \longleftrightarrow f_2} \left\{ \begin{array}{rl} 2x_1 - x_2 + 3x_3 & = -3 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 & = 12 \end{array} \right. \xrightarrow{2f_2}$$

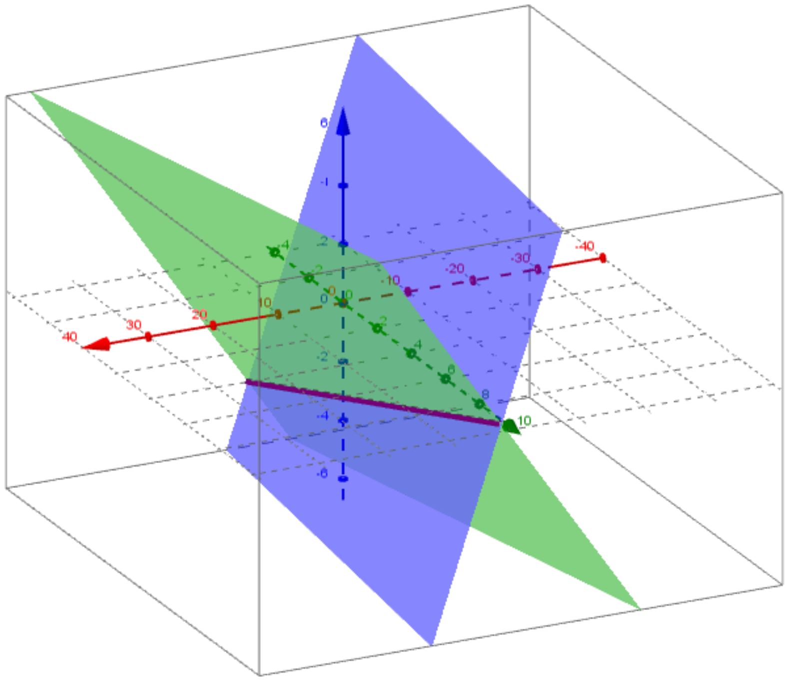
$$\left\{ \begin{array}{rl} 2x_1 - x_2 + 3x_3 & = -3 \\ 2x_1 + 2x_2 - 6x_3 & = 24 \end{array} \right. \xrightarrow{f_2 - f_1} \left\{ \begin{array}{rll} 2x_1 - x_2 + 3x_3 & = -3 & (1) \\ 3x_2 - 9x_3 & = 27 & (2) \end{array} \right.$$

Tomemos un parámetro t *con* $x_3 = t$*, reemplazando en (2) se obtiene* $3x_2 - 9t = 27$*, es decir,* $x_2 = 9 + 3t$*; ahora en (1),* $2x_1 - (9 + 3t) + 3t = -3$*, o sea,* $x_1 = 3$*. De donde,*

$$(x_1, x_2, x_3) = (3, 9 + 3t, t),$$

esto define una recta como se observa en la figura 6.4.

Figura 6.4: Intersección de planos.



Por consiguiente, el sistema lineal es consistente indeterminado cuya solución viene ser la recta:

$$\text{CS} = \{(3, 9+t, t)/t \in \mathbb{R}\}$$

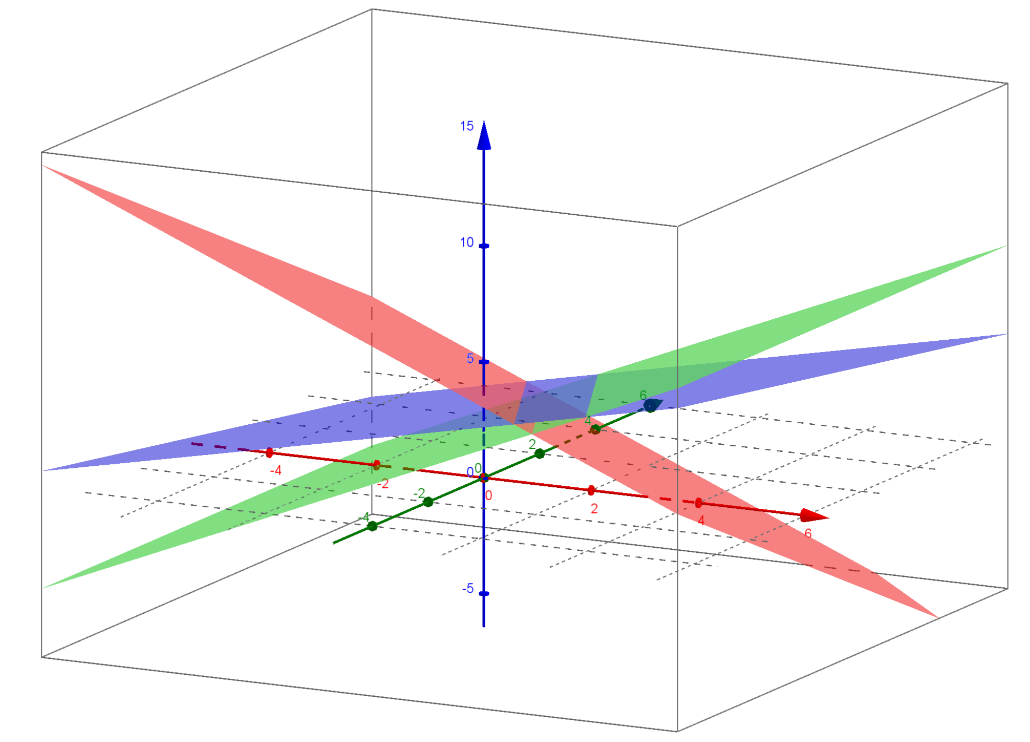
Ejemplo 6.7.5

Resolver:

$$\left\{\begin{array}{rcr} x_1 + x_2 + x_3 & = & 4 \\ -2x_1 + x_2 + 4x_3 & = & 12 \\ x_1 - x_3 & = & -2 \end{array}\right. \tag{6.29}$$

Solución.

Figura 6.5: Intersección de planos.



$$\left\{\begin{array}{rcr} x_1+x_2+x_3 &=& 4\\ -2x_1+x_2+4x_3 &=& 12\\ x_1-x_3 &=& -2 \end{array}\right. \begin{array}{c} \xrightarrow{f_2+2f_1} \\ \xrightarrow{f_3-f_1} \end{array} \left\{\begin{array}{rcr} x_1+x_2+x_3 &=& 4\\ 3x_2+6x_3 &=& 20\\ -x_2-2x_3 &=& -6 \end{array}\right. \begin{array}{c} \xrightarrow{\frac{1}{3}f_2} \\ \xrightarrow{-f_3} \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rcr} x_1+x_2+x_3 &=& 4\\ x_2+2x_3 &=& \frac{20}{3}\\ x_2+2x_3 &=& 6 \end{array}\right. \xrightarrow{f_3-f_2} \left\{\begin{array}{rcr} x_1+x_2+x_3 &=& 4\\ x_2+2x_3 &=& \frac{20}{3}\\ 0 &=& -\frac{2}{3} \end{array}\right.$$

En la última sistema lineal, la ecuación $0=-\dfrac{2}{3}$, *es una contradicción y esto significa que el sistema lineal no tiene ninguna solución. En la figura 6.5, no hay ninguno punto en común en la intersección de los tres planos.*

6.8. Método forma escalonada fila

El método resuelve sistema de ecuaciones lineales, usa operaciones filas en su matriz aumentada para convertir en matriz forma escalonada fila. Luego, se aplica sustitución directa al sistema lineal final asociado a la última matriz forma escalonada fila encontrada para obtener la solución deseada.

Ejemplo 6.8.1

Resolver:

$$\left\{\begin{array}{rcr} 2x_1 - x_2 + x_3 & = & 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 & = & -4 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 & = & 7 \end{array}\right. \tag{6.30}$$

Solución.

Consideremos la matriz aumentada:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -4 \\ -1 & -2 & 1 & 7 \end{array}\right]$$

Operemos con filas para obtener una matriz forma en escalonada fila:

f_2	2	-1	1	2	f_3	-1	-2	1	7
$-2f_1$	-2	-2	2	8	f_1	1	1	-1	-4
$f_2 - 2f_1$	0	-3	3	10	$f_3 + f_1$	0	-1	0	3

f_3	0	-1	0	3
$-\frac{1}{3}f_2$	0	1	-1	$-\frac{10}{3}$
$f_3 - \frac{1}{3}f_2$	0	0	-1	$-\frac{1}{3}$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -4 \\ -1 & -2 & 1 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow{f_1 \longleftrightarrow f_2} \left[\begin{array}{rrr|r} \boxed{1} & 1 & -1 & -4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & 7 \end{array}\right] \underrightarrow{\xrightarrow{f_2 - 2f_1}}_{f_3 + f_1}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} \boxed{1} & 1 & -1 & -4 \\ 0 & \boxed{-3} & 3 & 10 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{f_3 - \frac{1}{3}f_2} \left[\begin{array}{rrr|r} \boxed{1} & 1 & -1 & -4 \\ 0 & \boxed{-3} & 3 & 10 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & -\frac{1}{3} \end{array}\right]$$

El sistema lineal final tiene la forma:

$$\left\{\begin{array}{rcrl} x_1 + x_2 - x_3 & = & -4 & (1) \\ -3x_2 + 3x_3 & = & 10 & (2) \\ -x_3 & = & -\frac{1}{3} & (3) \end{array}\right.$$

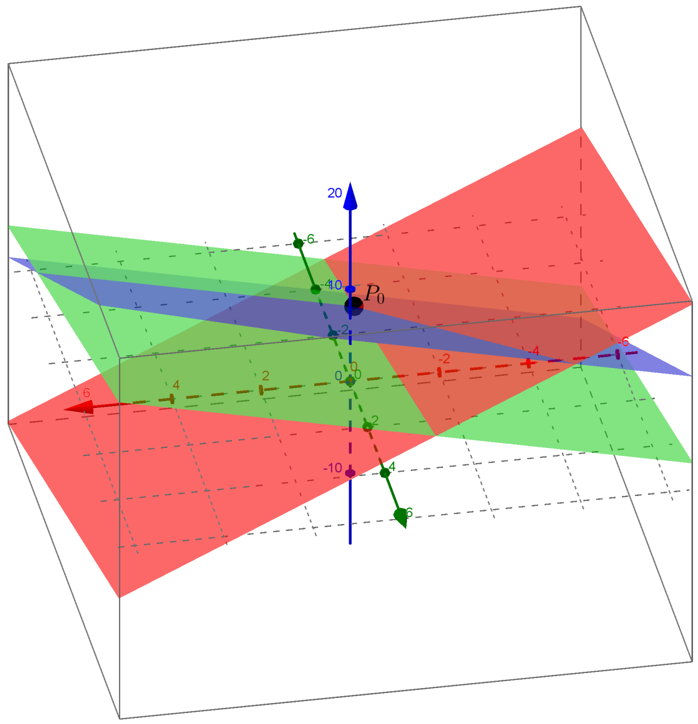
Despejando de (3), $x_3 = \dfrac{1}{3}$. *Por sustitución directa en (2) tenemos*

$$\begin{aligned} -3x_2 + 3x_3 = 10 &\Longrightarrow -3x_2 + 3\left(\frac{1}{3}\right) = 10 \\ &\Longrightarrow x_2 = -3 \end{aligned}$$

En (1):

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 = -4 &\Longrightarrow x_1 = -x_2 + x_3 - 4 \\ &\Longrightarrow x_1 = 3 + \frac{1}{3} - 4 \\ &\Longrightarrow x_1 = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Figura 6.6: Intersección de planos.



En la figura 6.6, los planos intersectan en un sólo punto P_0. Por lo tanto,

$$\text{CS} = \left\{\left(-\frac{2}{3}, -3, \frac{1}{3}\right)\right\}$$

Ejemplo 6.8.2

Considere el siguiente sistema lineal:

$$\left\{\begin{array}{rcr} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 & = & -1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 & = & 2 \\ -x_1 + 5x_2 - x_3 + 8x_4 & = & -5 \\ 3x_1 - x_2 + x_4 & = & 0 \end{array}\right. \tag{6.31}$$

Calcular $-91(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$.

Solución. *Las operaciones con filas son:*

f_2	2	-1	1	1	-1	f_3	-1	5	-1	8	0
$-2f_1$	-2	-4	-2	2	-4	f_1	1	2	1	-1	2
$f_2 - 2f_1$	0	-5	-1	3	-5	$f_3 + f_1$	0	7	0	7	-3

f_4	3	-1	0	1	0	f_4	0	-7	-3	4	-6
$-3f_1$	-3	-6	-3	3	-6	f_3	0	7	0	7	-3
$f_4 - 3f_1$	0	-7	-3	4	-6	$f_4 + f_3$	0	0	-3	11	-9

f_3	0	7	0	7	-3	f_3	0	0	-3	11	-9
$-7f_2$	0	-7	$-\frac{7}{5}$	$\frac{21}{5}$	-7	$-\frac{15}{7}f_2$	0	0	3	-24	$\frac{150}{7}$
$f_3 - 7f_2$	0	0	$-\frac{7}{5}$	$\frac{56}{5}$	-10	$f_3 - \frac{15}{7}f_2$	0	0	0	-13	$\frac{87}{7}$

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 2 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & -1 & 8 & -5 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{f_1 \longleftrightarrow f_2} \left[\begin{array}{rrrr|r} \boxed{1} & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 & 8 & -5 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \xrightarrow{f_2 - 2f_1} \\ \xrightarrow{f_3 + f_1} \\ \xrightarrow{f_4 - 3f_1} \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} \boxed{1} & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & \boxed{-5} & -1 & 3 & -5 \\ 0 & 7 & 0 & 7 & -3 \\ 0 & -7 & -3 & 4 & -6 \end{array}\right] \xrightarrow{f_4 + f_3} \left[\begin{array}{rrrr|r} \boxed{1} & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & \boxed{-5} & -1 & 3 & -5 \\ 0 & 7 & 0 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 11 & -9 \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{1}{5}f_2}$$

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} \boxed{1} & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} & 1 \\ 0 & 7 & 0 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 11 & -9 \end{array}\right] \xrightarrow{f_3 - 7f_2} \left[\begin{array}{rrrr|r} \boxed{1} & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{-\frac{7}{5}} & \frac{56}{5} & -10 \\ 0 & 0 & -3 & 11 & -9 \end{array}\right] \xrightarrow{f_4 - \frac{15}{7}f_3}$$

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} \boxed{1} & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{-\frac{7}{5}} & \frac{56}{5} & -10 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-13} & \frac{87}{7} \end{array}\right]$$

De esta última matriz aumentada tenemos

$$\left\{\begin{array}{rcrl} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 & = & 2 & (1) \\ x_2 + \frac{1}{5}x_3 - \frac{3}{5}x_4 & = & 1 & (2) \\ -\frac{7}{5}x_3 + \frac{56}{5}x_4 & = & -10 & (3) \\ -13x_4 & = & \frac{87}{7} & (4) \end{array}\right.$$

De (4), se tiene $x_4 = -\dfrac{87}{91}$. *De (3),*

$$\begin{aligned} -\frac{7}{5}x_3 + \frac{56}{5}x_4 = -10 &\Longrightarrow -\frac{7}{5}x_3 = -10 - \frac{56}{5}x_4 \\ &\Longrightarrow -\frac{7}{5}x_3 = -10 - \frac{56}{5}\left(-\frac{87}{91}\right) \\ &\Longrightarrow -\frac{7}{5}x_3 = \frac{-650 + 696}{65} \\ &\Longrightarrow -\frac{7}{5}x_3 = \frac{46}{65} \\ &\Longrightarrow x_3 = -\frac{46}{91} \end{aligned}$$

Luego en (2),

$$\begin{aligned} x_2 = 1 - \frac{1}{5}x_3 + \frac{3}{5}x_4 &\Longrightarrow x_2 = 1 - \frac{1}{5}\left(-\frac{46}{91}\right) + \frac{3}{5}\left(-\frac{87}{91}\right) \\ &\Longrightarrow x_2 = 1 + \frac{46 - 261}{5(91)} \\ &\Longrightarrow x_2 = 1 - \frac{215}{5(91)} \\ &\Longrightarrow x_2 = \frac{455 - 215}{5(91)} \\ &\Longrightarrow x_2 = \frac{48}{91} \end{aligned}$$

Finalmente sustituyendo en (1):

$$\begin{aligned} x_1 = 2 - 2x_2 - x_3 + x_4 &\Longrightarrow x_1 = 2 - 2\left(\frac{48}{91}\right) - \left(-\frac{46}{91}\right) + \left(-\frac{87}{91}\right) \\ &\Longrightarrow x_1 = \frac{182 - 96 + 46 - 87}{91} \\ &\Longrightarrow x_1 = \frac{45}{91} \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$-91(x_1 + x_2 + x_3) = -91\left(\frac{45}{91} + \frac{48}{91} - \frac{46}{91} - \frac{87}{91}\right) = -91\left(-\frac{40}{91}\right) = 40$$

Ejemplo 6.8.3

En el sistema lineal siguiente

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + x_2 - x_3 & = & 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 3 \\ x_1 + x_2 + (\lambda^2 - 5)x_3 & = & \lambda \end{array} \right. \tag{6.32}$$

determine todos los valores de λ del sistema lineal que tiene

a) *ninguna solución;*

b) *una única solución;*

c) *infinitas soluciones.*

Solución.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & \lambda^2 - 5 & \lambda \end{array} \right] \xrightarrow[\displaystyle\xrightarrow{f_3 - f_1}]{f_2 - f_1} \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -1 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{\lambda^2 - 4} & \lambda - 2 \end{array} \right]$$

Cuyo sistema lineal final de matriz aumentada final viene ser

$$\left\{ \begin{array}{rcll} x_1 + x_2 - x_3 & = & 2 & (1) \\ x_2 + 2x_3 & = & 1 & (2) \\ (\lambda - 2)(\lambda + 2)x_3 & = & \lambda - 2 & (3) \end{array} \right.$$

Para $\lambda = -2$, el sistema anterior se reduce

$$\left\{ \begin{array}{rcll} x_1 + x_2 - x_3 & = & 2 & (1) \\ x_2 + 2x_3 & = & 1 & (2) \\ 0 & = & -4 & (3) \end{array} \right.$$

en la ecuación (3) se obtiene la contradicción $0 = -4$, por consiguiente para $\lambda = -2$, el sistema lineal (6.32) no tiene solución.
Para $\lambda = 2$, el sistema (6.32) se reduce a

$$\left\{ \begin{array}{rcll} x_1 + x_2 - x_3 & = & 2 & (1) \\ x_2 + 2x_3 & = & 1 & (2) \end{array} \right.$$

Tomando $x_3 = t$, en (2) se obtiene $x_2 = 1 - 2t$. Ahora sustituyendo este valor en (1), se tienen

$$x_1 + 1 - 2t - t = 2 \Longrightarrow x_1 = 1 + 3t$$

Por lo tanto, el sistema lineal 6.32 tiene infinitas soluciones y está dada por:

$$\mathrm{CS} = \{(1 + 3t, 1 - 2t, t) : t \in \mathbb{R}\}.$$

Para $\lambda \neq 2$ y $\lambda \neq -2$, el sistema lineal se mantiene en su forma

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 &= 2 & (1) \\ x_2 + 2x_3 &= 1 & (2) \\ (\lambda - 2)(\lambda + 2)x_3 &= \lambda - 2 & (3) \end{cases}$$

En (3), despejamos x_3:

$$x_3 = \frac{\lambda - 2}{(\lambda - 2)(\lambda + 2)} = \frac{1}{\lambda + 2}$$

En (2), determinemos x_2:

$$x_2 = 1 - 2x_3 = 1 - \frac{2}{\lambda + 2} = \frac{\lambda}{\lambda + 2}$$

En (1), calculemos x_1:

$$x_1 = 2 - x_2 + x_3 = 2 - \frac{\lambda}{\lambda + 2} + \frac{1}{\lambda + 2} = \frac{\lambda + 5}{\lambda + 2}$$

Por lo tanto,

$$\mathrm{CS} = \left\{ \left(\frac{\lambda + 5}{\lambda + 2}, \frac{\lambda}{\lambda + 2}, \frac{1}{\lambda + 2} \right) \right\}$$

6.9. Método de Gauss Jordan

El método convierte en forma escalonada fila reducida a la matriz aumentada para obtener la solución de un sistema lineal. Para convertir matrices en forma escalonada fila reducida se usarán operaciones con filas.

Definición 6.9.1

Una matriz está en forma escalonada reducida si, satisface las siguientes propiedades:

FER1). Está en forma escalonada.

FER2). La entrada principal de cada fila no nula es 1 (llamado pivote).

FER3). Cada columna que contiene pivote 1, tiene ceros en todas las demás entradas.

Una matriz en forma escalonada fila reducida tiene la forma:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & * & 0 & * & * & 0 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & * & * & 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 6.9.1

Sea

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 23 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

¿La matriz K, está en forma escalonada fila reducida?

Solución. *La respuesta a la pregunta es que sí, ya que*

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 23 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

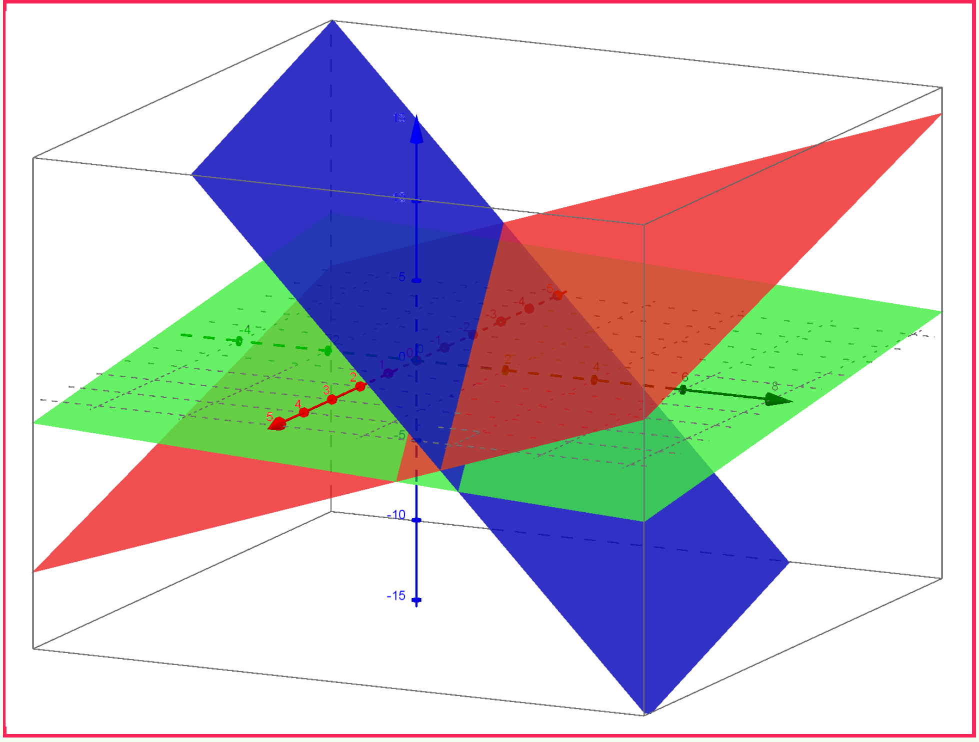
Ejemplo 6.9.2

Resolver:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = 5 \\ 3x_1 + x_2 + 7x_3 = 2 \end{cases}$$

Solución.

Figura 6.7: Intersección de planos



$$\left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 7 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[f_3-3f_1]{f_2+f_1} \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 4 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{2}f_2} \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & \frac{5}{2} \\ 0 & 4 & 4 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[f_3-4f_2]{f_1+f_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 2 & \frac{5}{2} \\ 0 & \boxed{1} & 1 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{array}\right]$$

De la última fila se obtiene $0 = -8$, y esto es una contradicción. Además, en la gráfica 6.7 se observa que no existe punto en común en los tres planos; por lo tanto, el sistema lineal no tiene ninguna solución.

Ejemplo 6.9.3

Considere el sistema lineal homogéneo:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \\ -x_1 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \end{cases} \tag{6.33}$$

y resuelva por el método de Gauss Jordan.

Solución.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{f_2+f_1} \left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{-f_2}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \xrightarrow{f_1+f_2} \\ \\ \xrightarrow{f_3-f_2} \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{f_1+f_3}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 3 & 0 \end{array}\right]$$

De matriz aumenta final tenemos

$$\begin{cases} x_1 + 2x_4 &= 0 \quad (1) \\ x_2 - 2x_4 &= 0 \quad (2) \\ x_3 + 3x_4 &= 0 \quad (3) \end{cases}$$

La columna 4 de la matriz aumentada final no contiene pivote por lo que, x_4 es variable libre y asignemos el paramétro t, o sea, $x_4 = t$. A partir de ecuaciones (1), (2) y (3) obtenemos

$$x_3 = -3t, x_2 = 2t, x_1 = -2t$$

Por lo tanto,

$$\mathrm{CS} = \{(-2t, 2t, -3t, t) : t \in \mathbb{R}\}$$

Ejemplo 6.9.4

Resolver:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 4 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 10 \\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 10x_4 &= 20 \\ x_1 + 4x_2 + 10x_3 + 20x_4 &= 35 \end{cases} \tag{6.34}$$

por el método de Gauss Jordan.

Solución.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 10 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 20 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 35 \end{array}\right] \begin{array}{c} \xrightarrow{f_2 - f_1} \\ \xrightarrow{f_3 - f_1} \\ \xrightarrow{f_4 - f_1} \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 5 & 9 & 16 \\ 0 & 3 & 9 & 19 & 31 \end{array}\right] \begin{array}{c} \xrightarrow{f_1 - f_2} \\ \\ \xrightarrow{f_3 - 2f_2} \\ \xrightarrow{f_4 - 3f_2} \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 10 & 13 \end{array}\right] \begin{array}{c} \xrightarrow{f_1 + f_3} \\ \xrightarrow{f_2 - 2f_3} \\ \\ \xrightarrow{f_4 - 3f_3} \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \xrightarrow{f_1 - f_4} \\ \xrightarrow{f_2 + 3f_4} \\ \xrightarrow{f_3 - 3f_4} \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \end{array}\right]$$

Tenemos

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = 1 \end{cases}$$

Por consiguiente,

$$\mathrm{CS} = \{(1, 1, 1, 1)\}$$

Ejemplo 6.9.5

Resolver:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 3 \end{cases} \tag{6.35}$$

Solución.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 4 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{f_2-2f_1 \\ f_3-f_1 \\ f_4-f_1}} \left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{f_2 \longleftrightarrow f_4}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & -5 & -1 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow{-f_2} \left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & -5 & -1 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{f_1+f_2 \\ f_3-2f_2 \\ f_4-3f_2}}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{f_3 \longleftrightarrow f_4} \left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{f_2+2f_3 \\ f_4-3f_3}}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{5}f_4} \left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & -\frac{1}{5} \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{f_1-f_4 \\ f_2+2f_4 \\ f_3+f_4}}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & \frac{6}{5} \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & -\frac{7}{5} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & -\frac{1}{5} \end{array}\right]$$

De donde,

$$\begin{cases} x_1 &= \frac{6}{5} \\ x_2 &= -\frac{7}{5} \\ x_3 &= -\frac{1}{5} \\ x_4 &= -\frac{1}{5} \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$\text{CS} = \left\{\left(\frac{6}{5}, -\frac{7}{5}, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}\right)\right\}$$

Ejemplo 6.9.6

Resolver

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 &= 2 \\ -3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= -1 \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 &= 3 \end{cases}$$

Solución.

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} \boxed{1} & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & 2 \\ -3 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -3 & 1 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{c} \xrightarrow{f_2-2f_1} \\ \xrightarrow{f_3+3f_1} \\ \xrightarrow{f_4-f_1} \end{array} \left[\begin{array}{rrrr|r} \boxed{1} & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & 2 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{5}f_2}$$

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} \boxed{1} & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -\frac{3}{5} & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & 2 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{c} \xrightarrow{f_1+2f_2} \\ \xrightarrow{f_3+5f_2} \end{array} \left[\begin{array}{rrrr|r} \boxed{1} & 0 & -\frac{1}{5} & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -\frac{3}{5} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & 2 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{c} \xrightarrow{f_1+\frac{1}{5}f_3} \\ \xrightarrow{f_2+\frac{3}{5}f_3} \\ \xrightarrow{f_4+4f_3} \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} \boxed{1} & 0 & 0 & \frac{8}{5} & \frac{7}{5} \\ 0 & \boxed{1} & 0 & \frac{14}{5} & \frac{6}{5} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 14 & 10 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{14}f_4} \left[\begin{array}{rrrr|r} \boxed{1} & 0 & 0 & \frac{8}{5} & \frac{7}{5} \\ 0 & \boxed{1} & 0 & \frac{14}{5} & \frac{6}{5} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{5}{7} \end{array}\right] \begin{array}{c} \xrightarrow{f_1-\frac{8}{5}f_4} \\ \xrightarrow{f_2-\frac{14}{5}f_4} \\ \xrightarrow{f_3-3f_4} \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & \frac{9}{35} \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & -\frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{5}{7} \end{array}\right]$$

Por consiguiente,

$$\text{CS} = \left\{ \left(\frac{9}{35}, -\frac{4}{5}, -\frac{1}{7}, \frac{5}{7} \right) \right\}$$

6.10. Determinante

El determinante de una matriz cuadrada es un número real, formalmente definimos a continuación.

Definición 6.10.1: Determinante

1. *Para cada* $A = [a_{11}] \in M_{1\times 1}(\mathbb{R})$, *se define:*

$$\boxed{|A| = a_{11}.} \tag{6.36}$$

donde $|A|$, *denota determinante de la matriz* A.

2. *Para toda* $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$, *se define:*

$$\boxed{|B| = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}} \tag{6.37}$$

3. *Para cada* $D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{bmatrix}$, *se define:*

$$|D| = \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{vmatrix} = d_{11} \begin{vmatrix} d_{22} & d_{23} \\ d_{32} & d_{33} \end{vmatrix} - d_{12} \begin{vmatrix} d_{21} & d_{23} \\ d_{31} & d_{33} \end{vmatrix} + d_{13} \begin{vmatrix} d_{21} & d_{22} \\ d_{31} & d_{32} \end{vmatrix} \tag{6.38}$$

Ejemplo 6.10.1

Calcular $|K|$, *donde* $K = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

Solución.

$$|K| = 7(1) - 3(2) = 7 - 6 = 1$$

Definición 6.10.2

Sea A *una matriz de* $n \times n$, *se definen:*

1. $\mathcal{S}_{ij}$ *es una* submatriz *de* $(n-1) \times (n-1)$ *de la matriz* A *si es definido eliminando la fila* i *y la columna* j *de la matriz* A.
2. $\mathcal{M}_{ij}$ *es* menor ij *si,* $\mathcal{M}_{ij} = |\mathcal{S}_{ij}|$ *y* $\mathcal{S}_{ij}$ *es submatriz.*
3. *El valor* $\mathcal{C}_{ij} = (-1)^{i+j}\mathcal{M}_{ij}$, *es llamado* cofactor *de la matriz* A.

Ejemplo 6.10.2

Determinar submatrices, menores y cofactores de la matriz $H = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & 20 \\ -8 & 6 & 5 \end{bmatrix}$.

Solución.

$$\mathcal{S}_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 20 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}, \mathcal{S}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 20 \\ -8 & 5 \end{bmatrix}, \mathcal{S}_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -8 & 6 \end{bmatrix}$$
$$\mathcal{S}_{21} = \begin{bmatrix} -3 & 7 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}, \mathcal{S}_{22} = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -8 & 5 \end{bmatrix}, \mathcal{S}_{23} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -8 & 6 \end{bmatrix}$$
$$\mathcal{S}_{31} = \begin{bmatrix} -3 & 7 \\ 1 & 20 \end{bmatrix}, \mathcal{S}_{32} = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 0 & 20 \end{bmatrix}, \mathcal{S}_{33} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{M}_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 20 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 120 = -115, \quad \mathcal{M}_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 20 \\ -8 & 5 \end{vmatrix} = 0(5) + 160 = 160$$

$$\mathcal{M}_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -8 & 6 \end{vmatrix} = 0 + 8 = 8, \quad \mathcal{M}_{21} = \begin{vmatrix} -3 & 7 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = -15 - 42 = -57$$

$$\mathcal{M}_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ -8 & 5 \end{vmatrix} = 10 + 56 = 66, \quad \mathcal{M}_{23} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -8 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 24 = -12$$

$$\mathcal{M}_{31} = \begin{vmatrix} -3 & 7 \\ 1 & 20 \end{vmatrix} = -60 - 7 = -67, \quad \mathcal{M}_{32} = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 0 & 20 \end{vmatrix} = 40 - 0 = 40$$

$$\mathcal{M}_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 0 = 2$$

$$\begin{array}{ll}
\mathcal{C}_{11} = (-1)^{1+1}\mathcal{M}_{11} = 1(-115) = -115, & \mathcal{C}_{12} = (-1)^{1+2}\mathcal{M}_{12} = (-1)(160) = -160 \\
\mathcal{C}_{13} = (-1)^{1+3}\mathcal{M}_{13} = 1(8) = 8, & \mathcal{C}_{21} = (-1)^{2+1}\mathcal{M}_{21} = (-1)(-57) = 57 \\
\mathcal{C}_{22} = (-1)^{2+2}\mathcal{M}_{22} = 1(66) = 66, & \mathcal{C}_{23} = (-1)^{2+3}\mathcal{M}_{23} = (-1)(-12) = 12 \\
\mathcal{C}_{31} = (-1)^{3+1}\mathcal{M}_{31} = 1(-67) = -67, & \mathcal{C}_{32} = (-1)^{3+2}\mathcal{M}_{32} = (-1)(40) = -40 \\
\mathcal{C}_{33} = (-1)^{3+3}\mathcal{M}_{33} = 1(2) = 2. &
\end{array}$$

Teorema 6.10.1: Expansión de Laplace

Sea $A = [a_{ij}] \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Entonces:

$$\begin{aligned} |A| =& a_{11}\mathcal{M}_{11} - a_{12}\mathcal{M}_{12} + a_{13}\mathcal{M}_{13} - \ldots + (-1)^{1+n}a_{1n}\mathcal{M}_{1n} && (6.39) \\ =& \sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}\mathcal{M}_{1j}, && (6.40) \end{aligned}$$

donde $\mathcal{M}_{1j}$, es determinante de la submatriz $(n-1)\times(n-1)$ de la matriz A, eliminando la fila 1 y la columna j.

$$\begin{aligned} |A| =& a_{11}\mathcal{M}_{11} - a_{21}\mathcal{M}_{21} + a_{31}\mathcal{M}_{31} - \ldots + (-1)^{n+1}a_{n1}\mathcal{M}_{n1} && (6.41) \\ =& \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}a_{j1}\mathcal{M}_{j1}, && (6.42) \end{aligned}$$

donde $\mathcal{M}_{j1}$, es determinante de la submatriz $(n-1)\times(n-1)$ de la matriz A, eliminando la fila j y la columna 1. De forma similar se extiende en otras filas o columnas. En terminos de cofactores:

$$\boxed{|A| = a_{i1}\mathcal{C}_{i1} + a_{i2}\mathcal{C}_{i2} + a_{i3}\mathcal{C}_{i3} + \ldots + a_{in}\mathcal{C}_{in},} \quad (6.43)$$

donde $\mathcal{C}_{ij}$, es cofactor con respecto a la entrada (i,j).
Demostración. *Ejercicio.*

Ejemplo 6.10.3

Considere la matriz del Ejemplo 6.10.2, calcule su determinante.

Solución. *Aplicando la ecuación (6.43), y los cofactores calculados en el Ejemplo 6.10.2, tenemos*

$$\begin{aligned}|H| &= a_{11}\mathcal{M}_{11} + a_{12}\mathcal{M}_{12} + a_{13}\mathcal{M}_{13}\\ &= 2(-115) + (-3)(-160) + 7(8)\\ &= 306\end{aligned}$$

Ejemplo 6.10.4

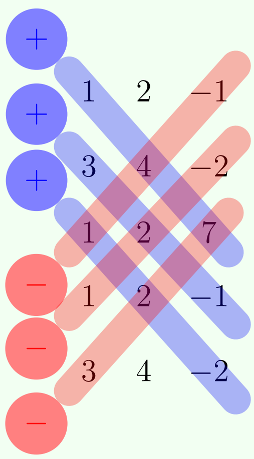
Sea $J = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1\\ 3 & 4 & -2\\ 1 & 2 & 7\end{bmatrix}$. *Hallar* $|J|$

Solución.

Aplicando el Teorema 6.10.1,

$$\begin{aligned}|J| &= (-1)^{1+1}a_{11}\mathcal{M}_{11} + (-1)^{1+2}a_{12}\mathcal{M}_{12} + (-1)^{1+3}a_{13}\mathcal{M}_{13}\\ &= (-1)^{1+1}1\begin{vmatrix} 4 & -2\\ 2 & 7\end{vmatrix} + (-1)^{1+2}2\begin{vmatrix} 3 & -2\\ 1 & 7\end{vmatrix} + (-1)^{1+3}(-1)\begin{vmatrix} 3 & 4\\ 1 & 2\end{vmatrix}\\ &= [4(7) - (-2)(2)] - 2[3(7) - (-2)(1)] - [3(2) - 4(1)]\\ &= 32 - 46 - 2\\ &= -16\end{aligned}$$

Método de Sarrus:



$$\begin{aligned}|J| &= \boxed{[(1)(4)(7) + (3)(2)(-1) + (1)(2)(-2)]} - \boxed{[(1)(4)(-1) + (1)(2)(-2) + (3)(2)(7)]}\\ &= 18 - 34\\ &= -16\end{aligned}$$

Ejemplo 6.10.5

Calcular el determinante de la matriz:

$$E = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 & -5 \\ 1 & 4 & -5 & 7 \\ 0 & 7 & 2 & 1 \\ 14 & -8 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

Solución.
Aplicando el Teorema 6.10.1,

$$\begin{aligned} |E| =&(-1)^{1+1}a_{11}\mathcal{M}_{11} + (-1)^{1+2}a_{12}\mathcal{M}_{12} + (-1)^{1+3}a_{13}\mathcal{M}_{13} + (-1)^{1+4}a_{14}\mathcal{M}_{14} \\ =&(-1)^{1+1}(-2)\mathcal{M}_{11} + (-1)^{1+2}(0)\mathcal{M}_{12} + (-1)^{1+3}(3)\mathcal{M}_{13} + (-1)^{1+4}(-5)\mathcal{M}_{14} \end{aligned} \tag{6.44}$$

Luego, calculemos los menores:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{11} =& \begin{vmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 7 & 2 & 1 \\ -8 & 7 & 1 \end{vmatrix} \\ =&(-1)^{1+1}4\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}(-5)\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ -8 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}(7)\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ -8 & 7 \end{vmatrix} \\ =&4(-5) + 5(15) + 7(65) \\ =&510 \end{aligned} \tag{6.45}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{13} =& \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & 7 & 1 \\ 14 & -8 & 1 \end{vmatrix} \\ =&(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ -8 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}4\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 14 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}7\begin{vmatrix} 0 & 7 \\ 14 & -8 \end{vmatrix} \\ =&15 - 4(-14) + 7(-98) \\ =& -615 \end{aligned} \tag{6.46}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{14} =& \begin{vmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 0 & 7 & 2 \\ 14 & -8 & 7 \end{vmatrix} \\ =&(-1)^{1+1}1\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ -8 & 7 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}4\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 14 & 7 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}(-5)\begin{vmatrix} 0 & 7 \\ 14 & -8 \end{vmatrix} \\ =&65 - 4(-28) - 5(-98) \\ =&667 \end{aligned} \tag{6.47}$$

Reemplazando los resultados (6.45), (6.46) y (6.47) en (6.44) obtenemos:

$$|E| = (-2)(510) + 3(-615) + 5(667) = -1020 - 1845 + 3335 = 470$$

Teorema 6.10.2: Propiedades de determinante

1. *Los determinantes de A y A^T, son lo mismo:*

$$|A| = |A^T|, \forall A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \tag{6.48}$$

2. *Intercambio de filas cambia de signo*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & a_{j3} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & a_{j3} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{6.49}$$

3. *Determinante de una matriz que contiene una fila múltiplo de otra fila:*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \lambda a_{i3} & \dots & \lambda a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0 \tag{6.50}$$

4.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \lambda a_{i3} & \dots & \lambda a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{6.51}$$

5.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} + \hat{a}_{i1} & a_{i2} + \hat{a}_{i2} & \dots & a_{in} + \hat{a}_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{a}_{i1} & \hat{a}_{i2} & \dots & \hat{a}_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{6.52}$$

6.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & a_{j3} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1}+\theta a_{i1} & a_{j2}+\theta a_{i2} & a_{j3}+\theta a_{i3} & \dots & a_{jn}+\theta a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{6.53}$$

Ejemplo 6.10.6

Hallar

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 4 \\ 6 & -5 & 2 & 3 \end{vmatrix} \tag{6.54}$$

Solución.

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 4 \\ 6 & -5 & 2 & 3 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 4 \\ 6 & -5 & 2 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \xrightarrow{f_2-3f_1} \\ \xrightarrow{f_3+2f_1} \\ \xrightarrow{f_4-6f_2} \end{matrix} \\
&= \begin{vmatrix} \boxed{1} & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & 2 & -2 \\ 0 & -4 & 1 & 6 \\ 0 & 7 & 2 & -3 \end{vmatrix} \\
&= \boxed{(-1)^2 1} \begin{vmatrix} 7 & 2 & -2 \\ -4 & 1 & 6 \\ 7 & 2 & -3 \end{vmatrix} \xrightarrow{f_3-f_1} \\
&= \begin{vmatrix} 7 & 2 & -2 \\ -4 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} \end{vmatrix} \\
&= \boxed{(-1)^6(-1)} \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} \\
&= -1(7+8) \\
&= -15
\end{aligned}$$

Ejemplo 6.10.7

Calcule

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & -4 & -2 \\ -3 & 1 & 5 & 1 \\ -4 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \tag{6.55}$$

Solución.

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 5 & 2 & -4 & -2 \\ -3 & 1 & 5 & 1 \\ -4 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{f_1+f_3} &= \begin{vmatrix} 1 & 5 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 5 & 1 \\ -4 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \xrightarrow{f_2+3f_1} \\ \xrightarrow{f_3+4f_1} \\ \xrightarrow{f_4-2f_1} \end{matrix} \\
&= \begin{vmatrix} \boxed{1} & 5 & -3 & 1 \\ 0 & 16 & -4 & 4 \\ 0 & 23 & -11 & 7 \\ 0 & -9 & 5 & -1 \end{vmatrix} \\
&= \boxed{1(-1)^2} \begin{vmatrix} 16 & -4 & 4 \\ 23 & -11 & 7 \\ -9 & 5 & -1 \end{vmatrix} \\
&= 16 \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 23 & -11 & 7 \\ -9 & 5 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \xrightarrow{f_2-23f_1} \\ \xrightarrow{f_3+9f_1} \end{matrix} \\
&= 16 \begin{vmatrix} \boxed{1} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{21}{4} & \frac{5}{4} \\ 0 & \frac{11}{4} & \frac{5}{4} \end{vmatrix} \\
&= 16 \boxed{(-1)^{1+1}1} \begin{vmatrix} -\frac{21}{4} & \frac{5}{4} \\ \frac{11}{4} & \frac{5}{4} \end{vmatrix} \\
&= 16 \left[\left(-\frac{21}{4}\right)\left(\frac{5}{4}\right) - \left(\frac{11}{4}\right)\left(\frac{5}{4}\right) \right] \\
&= 16 \left(-\frac{160}{16}\right) \\
&= -160
\end{aligned}$$

Ejemplo 6.10.8

Calcule:

$$\begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & -5 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \tag{6.56}$$

Solución.

$$\begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & -5 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \begin{array}{c} \xrightarrow{f_2 - 2f_3} \\ \\ \xrightarrow{f_4 - 3f_3} \end{array} = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 11 & -1 & 0 \\ \boxed{1} & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 14 & -5 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \boxed{(-1)^{3+1}1} \begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 11 & -1 & 0 \\ 1 & 14 & -5 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \begin{array}{c} \xrightarrow{f_1 + 2f_3} \\ \\ \xrightarrow{f_4 - 2f_3} \end{array}$$

$$= \begin{vmatrix} 6 & 29 & -7 & 0 \\ 2 & 11 & -1 & 0 \\ 1 & 14 & -5 & \boxed{1} \\ 1 & -28 & 10 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \boxed{(-1)^{3+4}1} \begin{vmatrix} 6 & 29 & -7 \\ 2 & 11 & -1 \\ 1 & -28 & 10 \end{vmatrix} \begin{array}{c} \xrightarrow{f_1 - 7f_2} \\ \\ \xrightarrow{f_3 + 10f_2} \end{array}$$

$$= -\begin{vmatrix} -8 & -48 & 0 \\ 2 & 11 & \boxed{-1} \\ 21 & 82 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \boxed{-(-1)^{2+3}(-1)} \begin{vmatrix} -8 & -48 \\ 21 & 82 \end{vmatrix}$$

$$= -[(-8)(82) - 21(-48)]$$

$$= -352$$

Teorema 6.10.3: Determinante de matriz triangular inferior y superior

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}\dots a_{nn}. \tag{6.57}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}\dots a_{nn}. \tag{6.58}$$

Demostración. *Queda como ejercicio para el lector.*

Ejemplo 6.10.9

Calcular

$$\begin{vmatrix} -5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 20 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 34 & 9 & 0 & 0 \\ 2 & -8 & 0 & 1 & 0 \\ -78 & 4 & -6 & 12 & -3 \end{vmatrix} \tag{6.59}$$

Solución. *Aplicando el teorema 6.10.3*

$$\begin{vmatrix} \boxed{-5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 20 & \boxed{6} & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 34 & \boxed{9} & 0 & 0 \\ 2 & -8 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ -78 & 4 & -6 & 12 & \boxed{-3} \end{vmatrix} = (-5)(6)(9)(1)(-3) = 810.$$

Ejemplo 6.10.10

Hallar

$$\begin{vmatrix} 10 & 0 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \tag{6.60}$$

Solución. *Aplicando el teorema 6.10.3*

$$\begin{vmatrix} \boxed{10} & 0 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{-2} & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{3} & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{2} \end{vmatrix} = (10)(-2)(3)(1)(2) = -120.$$

Ejemplo 6.10.11

Si $\lambda = a_1 + \ldots + a_n$ y $A_k = \lambda - a_k$ $(k = 1, \ldots, n)$, pruebe que

$$\begin{vmatrix} x - A_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n \\ a_1 & x - A_2 & a_3 & \ldots & a_n \\ a_1 & a_2 & x - A_3 & \ldots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & x - A_n \end{vmatrix} = x\,(x - \lambda)^{n-1}.$$

Solución. *Antes de operar con filas usemos la propiedad $|A| = |A^T|$. Como $x - A_k + \sum\limits_{j=1, j\neq k} a_j = x$ y $x - \lambda = x - A_k - a_k$, entonces sumemos las filas desde 2 hasta n a la fila 1 para obtener entrada x en la primera fila, por propiedad de determinante ahora la primera fila contiene unos y luego restamos múltiplo de la fila 1 a otras filas para así obtener ceros. En seguida, aplicamos determinante de* *matriz triangular superior para obtener el resultado deseado. Es decir:*

$$\begin{vmatrix} x-A_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & x-A_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & x-A_3 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & x-A_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-A_1 & a_1 & a_1 & \dots & a_1 \\ a_2 & x-A_2 & a_2 & \dots & a_2 \\ a_3 & a_3 & x-A_3 & \dots & a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_n & a_n & \dots & x-A_n \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x & x & x & \dots & x \\ a_2 & x-A_2 & a_2 & \dots & a_2 \\ a_3 & a_3 & x-A_3 & \dots & a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_n & a_n & \dots & x-\lambda+a_n \end{vmatrix}$$

$$= x\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_2 & x-A_2 & a_2 & \dots & a_2 \\ a_3 & a_3 & x-A_3 & \dots & a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_n & a_n & \dots & x-A_n \end{vmatrix}$$

$$= x\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & x-\lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & x-\lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= x\,(x-\lambda)^{n-1}$$

6.11. Regla de Cramer

Teorema 6.11.1: Regla de Cramer

Si A es una matriz de $n \times n$, con $|A| \neq 0$ y $b \in \mathbb{R}^n$, entonces la solución $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)^T$ del sistema lineal $Ax = b$, es dada por

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|}, \tag{6.61}$$

donde A_i, es la matriz obtenida sustituyendo i-ésima columna por el vector b.
Demostración. *Queda como ejercicio.*

Ejemplo 6.11.1

Resolver el sistema

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 &= 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 8 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 &= 3 \end{cases} \tag{6.62}$$

mediante la regla Cramer.
Solución.

En la forma $Ax = b$, el sistema del Ejemplo 6.11.1 es:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ 3 \end{bmatrix},$$

donde $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ *y* $b = \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Ahora,

$$\begin{aligned} |A| &= 2(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (+1)(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 2(1-2) - 1(1+1) - 1(2+1) \\ &= -7 \end{aligned}$$

Como $|A| \neq 0$, podemos aplicar la regla de Cramer para encontrar solución del sistema. Para obtener x_1 dividimos el determinante de A con sustitución de la primera columna por b entre la determinante de A:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 8 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{3(1-2) - 1(8-3) - 1(16-3)}{-7} = \frac{-21}{-7} = 3$$

De forma similar se obtienen los valores de x_2 y x_3:

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 8 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{2(8-3) - 3(1+1) - 1(3+8)}{-7} = \frac{-7}{-7} = 1$$

y

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 8 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{2(3-16) - 1(3+8) + 3(2+1)}{-7} = \frac{-28}{-7} = 4$$

Por lo tanto,

$$\text{CS} = \{(3, 1, 4)\}$$

Ejemplo 6.11.2

Resolver el sistema

$$\left\{ \begin{aligned} 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &= 2 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + 4x_4 &= -2 \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 6x_4 &= -6 \end{aligned} \right. \tag{6.63}$$

Solución. *En forma $Ax = b$, el sistema de este ejemplo está dada por*

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ -6 \end{bmatrix},$$

donde $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & 6 \end{bmatrix}$ *y* $b = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ -6 \end{bmatrix}$.

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
|A| = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & 6 \end{vmatrix} \begin{matrix} \xrightarrow{f_1 - 4f_4} \\ \xrightarrow{f_2 - 2f_4} \\ \xrightarrow{f_3 + 2f_4} \end{matrix} & \begin{vmatrix} 0 & 6 & 13 & -23 \\ 0 & 3 & 5 & -8 \\ 0 & -3 & -4 & 13 \\ 1 & -2 & -3 & 6 \end{vmatrix} \\
=&(-1)^5 \begin{vmatrix} 6 & 13 & -23 \\ 3 & 5 & -8 \\ -3 & -4 & 13 \end{vmatrix} \begin{matrix} \xrightarrow{f_1 + 2f_3} \\ \xrightarrow{f_2 + f_3} \end{matrix} - \begin{vmatrix} 0 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ -3 & -4 & 13 \end{vmatrix} \\
=& -(-1)^4(-3) \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \\
=& -(-3)(25 - 3) \\
=&66
\end{aligned}$$

Siendo $|A| \neq 0$, aplicamos Cramer. Determinemos primeros los determinates:

$$\begin{aligned}
|A_1| = & \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ -6 & -2 & -3 & 6 \end{vmatrix} \begin{matrix} \xrightarrow{f_1 - 2f_3} \\ \xrightarrow{f_2 + 2f_3} \\ \\ \xrightarrow{f_4 + 6f_3} \end{matrix} \\
= & \begin{vmatrix} 0 & -4 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 9 & 12 \end{vmatrix} \\
=&(-1)^4 \begin{vmatrix} -4 & -3 & -1 \\ 1 & 3 & 6 \\ 4 & 9 & 12 \end{vmatrix} \begin{matrix} \xrightarrow{f_1 + 4f_2} \\ \\ \xrightarrow{f_3 - 4f_2} \end{matrix} \\
= & \begin{vmatrix} 0 & 9 & 23 \\ 1 & 3 & 6 \\ 0 & -3 & -12 \end{vmatrix} \\
=&(-1)^3 \begin{vmatrix} 9 & 23 \\ -3 & -12 \end{vmatrix} \\
=& -(-108 + 23(3)) \\
=&39
\end{aligned}$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -6 & -3 & 6 \end{vmatrix} \begin{array}{c} \xrightarrow{f_1 - 4f_4} \\ \xrightarrow{f_2 - 2f_4} \\ \xrightarrow{f_3 + 2f_4} \end{array}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 26 & 13 & -23 \\ 0 & 10 & 5 & -8 \\ 0 & -11 & -4 & 13 \\ 1 & -6 & -3 & 6 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^5 \begin{vmatrix} 26 & 13 & -23 \\ 10 & 5 & -8 \\ -11 & -4 & 13 \end{vmatrix} \xrightarrow{f_3 + f_2}$$

$$=(-1)^5 \begin{vmatrix} 26 & 13 & -23 \\ 10 & 5 & -8 \\ -1 & 1 & 5 \end{vmatrix} \begin{array}{c} \xrightarrow{f_1 + 26f_3} \\ \xrightarrow{f_2 + 10f_3} \end{array}$$

$$= - \begin{vmatrix} 0 & 39 & 107 \\ 0 & 15 & 42 \\ -1 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= - (-1)(-1)^4 \begin{vmatrix} 39 & 107 \\ 15 & 42 \end{vmatrix}$$

$$=39(42) - 107(15)$$

$$=33$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -6 & 6 \end{vmatrix} \begin{array}{c} \xrightarrow{f_1 - 4f_4} \\ \xrightarrow{f_2 - 2f_4} \\ \xrightarrow{f_3 + 2f_4} \end{array}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 6 & 26 & -23 \\ 0 & 3 & 10 & -8 \\ 0 & -3 & -11 & 13 \\ 1 & -2 & -6 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 6 & 26 & -23 \\ 3 & 10 & -8 \\ -3 & -11 & 13 \end{vmatrix} \begin{array}{c} \xrightarrow{f_1 + 2f_3} \\ \xrightarrow{f_2 + f_3} \end{array}$$

$$= - \begin{vmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 5 \\ -3 & -11 & 13 \end{vmatrix}$$

$$= - (-3)(-1)^4 \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$=3(20 + 3)$$

$$=69$$

$$|A_4| = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -6 \end{vmatrix} \begin{array}{c} \xrightarrow{f_1 - 4f_4} \\ \xrightarrow{f_2 - 2f_4} \\ \xrightarrow{f_3 + 2f_4} \end{array}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 6 & 13 & 26 \\ 0 & 3 & 5 & 10 \\ 0 & -3 & -4 & -11 \\ 1 & -2 & -3 & -6 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^5 \begin{vmatrix} 6 & 13 & 26 \\ 3 & 5 & 10 \\ -3 & -4 & -11 \end{vmatrix} \begin{array}{c} \xrightarrow{f_1 + 2f_3} \\ \xrightarrow{f_2 + f_3} \end{array}$$

$$= - \begin{vmatrix} 0 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ -3 & -4 & -11 \end{vmatrix}$$

$$= - (-3)(-1)^4 \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$=3(-5-4)$$

$$= - 27$$

Ahora, determinemos x_1, x_2, x_3 y x_4:

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{39}{66} = \frac{13}{22},$$

$$x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{33}{66} = \frac{1}{2},$$

$$x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{69}{66} = \frac{23}{22},$$

$$x_4 = \frac{|A_4|}{|A|} = \frac{-27}{66} = -\frac{9}{22}.$$

Por lo tanto,

$$\text{CS} = \left\{ \left(\frac{13}{22}, \frac{1}{2}, \frac{23}{22}, -\frac{9}{22} \right) \right\}$$

6.12. Ejercicios propuestos

Tarea para casa:

✍**1.** Escribir la matriz de 5×5, cuyas entradas son dadas por $a_{ij} = (-1)^{i+j}$.

✍**2.** Simplificar:

$$\begin{bmatrix} x-y-w & y-z & z-w & t \\ w-z & x-y & y-z & z-t \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x-w & y-z & z-y & t-x \\ -z-y+w & z-y & w-z & -t \end{bmatrix}$$

✍**3.** Considere las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 12 & -3 \end{bmatrix}$$

Determinar las siguientes operaciones:

a) $A + B + C$

b) $2A - B + C$

c) $AB - B + 3A$

d) $BA - AB$

e) $A - 3B + AB$

✍**4.** Calcular AB, donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -7 & 2 & -6 & 1 \\ 1 & 0 & -4 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -5 & 0 & -4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 10 & 6 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & -4 & 2 \\ -8 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 8 & 0 & 12 \end{bmatrix}$$

✍**5.** Considere las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix},$$

Hallar X, de la ecuación $5(X + A) = BA - 2XB$.

✍**6.** Dadas las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 8 & -2 \\ 0 & 7 & -4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2 & 4 & -5 \\ 9 & -2 & 12 \\ -2 & 6 & 20 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -6 & 10 \\ -8 & 10 & 3 \end{bmatrix}$$

Resolver la ecuación $2A - X = \frac{1}{2}(3C - A + 6X + AB)$

✍**7.** Considere las matrices

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pruebe que $(H+G)^2 \neq H^2+2HG+G^2$, pero que $(H+G)^3 = H^3+3H^2G+3HG^2+G^3$. ¿Vale $(H+G)^4 = H^4+4H^3G+6H^2G^2+4HG^3+G^4$? Justifique su respuesta.

✍**8.** Encontrar todas las matrices H de 2×2, con entradas reales tal que $H^2 = I_2$.

✍**9.** Calcular H^4, si

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 & 9 \\ 0 & 3 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

✍**10.** Transformar en forma escalonada fila las siguientes matrices:

$a)$ $\begin{bmatrix} 2 & -4 & 8 & 12 & 20 \\ 4 & 12 & -8 & 22 & 13 \\ 3 & 4 & 10 & -2 & 1 \\ 8 & 3 & 9 & 11 & 40 \end{bmatrix}$

$b)$ $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 7 & 2 \\ 0 & 3 & -8 & 2 & 9 \\ 12 & -24 & 0 & 12 & 11 \\ 1 & 3 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

$c)$ $\begin{bmatrix} -1 & 5 & 12 & -7 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 13 & 20 & -4 & -17 \\ 2 & -4 & 34 & 2 & 21 & 3 \\ 1 & -4 & 9 & 20 & -7 & -9 \\ 40 & -3 & 9 & -12 & 6 & 16 \end{bmatrix}$

$d)$ $\begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 & 1 & -8 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 & 1 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 21 & 3 & 12 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & 12 & 20 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 45 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

$e)$ $\begin{bmatrix} 0 & 4 & 16 & -7 & 0 & 1 & 0 & -4 \\ -2 & 0 & 0 & 2 & 1 & 3 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 21 & 3 & 12 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & 12 & 20 & 9 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 45 & 0 & 5 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

✍**11.** Resolver cada una de los sistemas de ecuaciones por método forma escalonada fila:

$a)$ $\begin{cases} 2x_1 - 10x_2 + 3x_3 = 5 \\ 2x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 - 3x_2 = 6 \end{cases}$

$b)$ $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$

$c)$ $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 3 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 = -2 \end{cases}$

$d)\ \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \\ -x_1 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \end{cases}$

$e)\ \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 &= 0 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + 4x_5 &= 0 \\ -x_2 + x_3 - x_4 + x_5 &= 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \end{cases}$

$f)\ \begin{cases} x_1 - 6x_2 + 3x_3 - x_4 + 10x_5 &= 0 \\ x_1 - 7x_2 - x_3 + 2x_4 - 9x_5 &= 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 5x_4 + x_5 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 0 \end{cases}$

$g)\ \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= 5 \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 &= -8 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 &= 1 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 &= 4 \end{cases}$

$h)\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 6x_4 - 4x_5 &= 1 \\ 2x_2 + 5x_3 - x_4 - 4x_5 &= 2 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 &= -1 \\ x_1 + x_3 - 2x_5 &= 3 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 + 6x_4 - x_5 &= -2 \end{cases}$

$i)\ \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 9x_4 + 12x_5 &= 16 \\ -14x_1 + 24x_2 - 4x_3 + 10x_4 - 18x_5 &= -8 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 + 2x_5 &= 40 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 8x_5 &= -32 \\ 3x_1 + x_2 + 17x_3 - 9x_4 - 18x_5 &= 55 \end{cases}$

✍**12.** Resuelva los siguiente sistemas lineales, por el método Gauss Jordan:

$a)\ \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= 3 \\ 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 + x_4 &= 1 \\ -3x_1 - 7x_2 + 7x_3 - 5x_4 &= 7 \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 3x_4 &= -5 \end{cases}$

$b)\ \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 &= 2 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 5x_4 &= 10 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 9x_4 &= 0 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 + 8x_4 &= 7 \end{cases}$

$c)\ \begin{cases} 3x_1 + 8x_2 - 3x_3 - 14x_4 &= 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 &= 2 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 10x_4 &= 3 \\ x_1 + 5x_2 - 2x_3 - 12x_4 &= -1 \end{cases}$

$d)\ \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \end{cases}$

$$e)\ \begin{cases} -x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 9x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 0 \\ x_3 + x_4 &= 0 \end{cases}$$

$$f)\ \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \end{cases}$$

$$g)\ \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 &= 4 \\ 3x_2 - x_3 + 4x_4 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 - 5x_3 + 6x_4 &= -3 \end{cases}$$

$$h)\ \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 0 \\ -2x_1 + 5x_2 - 4x_3 &= 0 \end{cases}$$

$$i)\ \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 - 2x_4 &= 0 \\ -3x_1 + 4x_2 + x_3 - 3x_4 &= 0 \end{cases}$$

$$j)\ \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + 2x_5 &= 1 \\ 4x_1 - 3x_2 - 8x_3 - 2x_4 - x_5 &= 4 \\ 2x_1 + 3x_2 - 6x_3 - 3x_4 + 12x_5 &= 2 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + 2x_5 &= 6 \end{cases}$$

$$k)\ \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 + 2x_5 - x_6 &= 4 \\ -x_1 - 8x_2 - 8x_3 - 20x_4 - x_5 + x_6 &= 2 \\ 7x_1 + 3x_2 - 3x_4 + 2x_5 - x_6 &= -2 \\ -x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + 2x_5 - x_6 &= 9 \\ 9x_1 - x_3 + x_4 + 2x_5 - x_6 &= -12 \end{cases}$$

✍**13.** ¿Para qué valores de λ, el sistema

$$\begin{cases} (\lambda - 1)x_1 - x_2 - 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 + \lambda x_2 + x_3 &= 0 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 &= 0 \end{cases}$$

tiene solución no trivial?

✍**14.** Demuestre que el sistema no lineal tiene 18 soluciones para $0 \leq \alpha \leq 2\pi$, $0 \leq \beta \leq 2\pi$ y $0 \leq \gamma \leq 2\pi$ y

$$\begin{cases} 2\sin\alpha + 5\cos\beta + 3\tan\gamma &= 0 \\ \sin\alpha + 2\cos\beta + 3\tan\gamma &= 0 \\ -\sin\alpha - 5\cos\beta + 5\tan\gamma &= 0 \end{cases}$$

✍**15.** Resuelve el sistema de ecuaciones para x_1 y x_2:

$$\begin{cases} x_1^2 + x_1x_2 - x_2^2 &= 1 \\ x_1^2 + 3x_1x_2 + 2x_2^2 &= 0 \\ 2x_1^2 - x_1x_2 + 3x_2^2 &= 13 \end{cases}$$

Sugerencia: tome $u = x_1^2$, $v = x_1x_2$ y $w = x_2^2$.

✍**16.** Considere el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} \alpha x_1 + \beta x_2 + \theta x_3 &= b_1 \\ \alpha^2 x_1 + \beta^2 x_2 + \theta^2 x_3 &= b_2 \\ \alpha^3 x_1 + \beta^3 x_2 + \theta^3 x_3 &= b_3 \end{cases}$$

Dé solución al sistema cuando α, β y θ son diferentes. Dé condición para una solución cuando $\alpha = \beta \neq \theta$ y dar solución general en este caso.

✍**17.** Discutir las soluciones del sistema de ecuaciones en incógnitas:

$$\begin{cases} \alpha x_1 + \beta x_2 + 2x_3 &= 1 \\ \alpha x_1 + (2\beta - 1)x_2 + 3x_3 &= 1 \\ \alpha x_1 + \beta x_2 + (\beta + 3)x_3 &= 2\beta - 1 \end{cases}$$

✍**18.** Determine los valores de k, de tal manera que el sistema lineal

$$\begin{cases} kx + y + z + w &= 0 \\ x + ky + z + w &= 0 \\ x + y + kz + w &= 0 \\ x + y + z + kw &= 0 \end{cases}$$

a) tenga una única solución,

b) tenga solución de un sólo parámetro,

c) tenga solución de dos parámetros,

d) tenga solución de tres parámetros.

✍**19.** Encontrar las inversas de las matrices:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

✍**20.** Sea la matriz

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

Hallar H^{500}.

✍**21.** Encontrar las inversas de las matrices siguientes, si es que existe:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 5 \\ -1 & 4 & 12 \\ -14 & 8 & -16 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 2 & 6 & 11 \\ 1 & -4 & 2 \\ 24 & 7 & 4 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 12 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 4 & 5 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 & 7 \end{bmatrix}$

f) $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & 2 & 4 \\ -4 & 2 & -4 & -6 \\ 2 & -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

g) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & -8 & 12 \\ 5 & 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

h) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 6 & -1 \\ 0 & 2 & -4 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 3 & 0 & -3 \\ -2 & 0 & 5 & 4 & 1 \\ 1 & 7 & -5 & 9 & 4 \end{bmatrix}$

✍**22.** Se cumple:

$$\begin{bmatrix} \lambda & \mu & \mu & \mu \\ \mu & \lambda & \mu & \mu \\ \mu & \mu & \lambda & \mu \\ \mu & \mu & \mu & \lambda \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Hallar $3\lambda - 2\mu$.

✍**23.** Sean las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 9 \\ 2 & 3 & 8 \\ -4 & 2 & 16 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -3 & 7 & -8 \\ 2 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -2 & -9 & 5 \\ 3 & -7 & 3 \\ 1 & -8 & 1 \end{bmatrix}$$

Hallar X, en la ecuación $XA = XB + CA$.

✍**24.** Considere la matriz involutiva $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{11} \end{bmatrix}$. Calcule $a_{11}^2 + a_{12}^2$.

✍**25.** Las matrices $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ y $D = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$ satisfacen

$$\begin{cases} AX &= D + Y \\ BY &= A + D \end{cases}$$

Hallar $X - Y$.

✍**26.** Sea K una matriz de $n \times 1$ tal que $K^T K = 1$. La matriz H de $n \times n$ dada por

$$H = I_n - 2KK^T$$

es llamada una matriz de Householder. Demuestre que:

a) H es simétrica.

b) $H^{-1} = H^T$

c) $H^{200} = I_n$

✍**27.** Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Hallar A^k, para todo $k \in \mathbb{Z}$.

✍**28.** Sea $G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Calcular G^5.

✍**29.** Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) El determinante de una matriz puede ser calculado por expansión sobre cualquier columna o fila.

b) Si una matriz contiene una columna de ceros, entonces su determinante es cero.

c) El determinante de una matriz triangular superior es el producto de sus entradas de la diagonal principal.

d) Si H es una matriz invertible entonces $\det(H^{-1}) = [\det(H)]^{-1}$.

e) Si J es una matriz obtenida por intecambio de dos fila o dos columnas de H, entonces $\det(H) = \det(J)$.

f) $\det(A + \alpha B) = \det(A) + \alpha \det(B)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

g) Si $A = A^T$ entonces $\det(A) = \pm 1$.

h) Si K es una matriz diagonal de $n \times n$ con entrada d, entonces $\det(K) = d^n$.

i) Si A, B y C son matrices cuadradas entonces $\det(ABC) = \det(A)\det(B)\det(C)$.

✍**30.** En las siguientes matrices encontrar el determinante:

a) $\begin{bmatrix} 3 & -8 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}$

$b)$ $\begin{bmatrix} -4 & 0 & 7 \\ -1 & 8 & 12 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

$c)$ $\begin{bmatrix} 6 & -3 & 12 \\ 8 & 5 & 2 \\ 9 & 2 & -20 \end{bmatrix}$

$d)$ $\begin{bmatrix} -2 & 4 & -1 \\ 2 & -6 & 2 \\ -8 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

$e)$ $\begin{bmatrix} 3 & -5 & 12 \\ 4 & -5 & -12 \\ 7 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

$f)$ $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & -5 \\ 2 & -5 & 6 & 2 \\ 1 & -8 & 6 & 9 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

$g)$ $\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 9 \\ 5 & 0 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & -4 & 1 \\ -4 & 2 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

$h)$ $\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 8 \\ 5 & -6 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 4 & -1 \\ -4 & 3 & -6 & -2 \end{bmatrix}$

$i)$ $\begin{bmatrix} -4 & 2 & -1 & -8 & 1 \\ 7 & 1 & -4 & 3 & -12 \\ 1 & 3 & 0 & 14 & 11 \\ 6 & -2 & -4 & 6 & 8 \\ 2 & -6 & 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

$j)$ $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & -6 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

$k)$ $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & -4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ -6 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -2 & 2 \\ 3 & -3 & 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

$l)$ $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & -4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -4 & -2 & 3 \\ 4 & -4 & 3 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & -1 & 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

$$m)\quad \begin{bmatrix} -15 & 0 & 15 & -3 & 3 & -2 & 5 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & -4 & -10 & -3 \\ 0 & -3 & 0 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 5 & -1 & 0 & 1 & -5 & -7 & -5 \\ 4 & 0 & -3 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & -2 & 8 & 0 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & -2 & -4 & -2 & -10 & 0 \end{bmatrix}$$

✍**31.** Demuestre que

$$\begin{vmatrix} 0 & f & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d & 0 & m \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e & 0 \end{vmatrix} = -acefhm$$

✍**32.** Considere la ecuación:

$$\begin{vmatrix} a & 0 & a^2 & a \\ 0 & a^2 & a & a^2 \\ a^2 & a & a^3 & a^2 \\ a^3 & a & a^5 & a^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Hallar el mayor valor de a.

✍**33.** Determine los determinantes:

$$a)\quad \begin{vmatrix} x^2 & x & x^3 \\ x^7 & x^5 & x^4 \\ x^8 & x^3 & x^5 \end{vmatrix}$$

$$b)\quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$c)\quad \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

✍**34.** Demostrar que el determinante

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 & 7 & 6 \\ 2 & 0 & 7 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 5 & 3 & 8 \\ 9 & 3 & 2 & 0 & 4 \\ 7 & 2 & 1 & 4 & 4 \end{vmatrix}$$

es divisible por 9.

✍**35.** Calcular:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & m \\ -1 & 0 & 3 & \dots & m \\ -1 & -2 & 0 & \dots & m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

✍**36.** Calcular:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 \\ 13 & 15 & 17 & 19 & 21 & 23 \\ 25 & 27 & 29 & 31 & 33 & 35 \\ 37 & 39 & 41 & 43 & 45 & 47 \\ 49 & 51 & 53 & 55 & 57 & 59 \\ 61 & 63 & 65 & 67 & 69 & 71 \end{vmatrix}$$

✍**37.** Demuestre que

$$\begin{vmatrix} x+y & x & x & \dots & x \\ x & x+y & x & \dots & x \\ x & x & x+y & \dots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & x & \dots & x+y \end{vmatrix} = (mx+y)y^{m-1},$$

donde, la matriz es de $m \times m$.

✍**38.** Demostrar que:

$$\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+y & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+w \end{vmatrix} = xyzw\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{w}\right)$$

✍**39.** Demuestre que si $\beta \neq \lambda$, entonces

$$\begin{vmatrix} \beta+\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \beta\lambda & \beta+\lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \beta\lambda & \beta+\lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \beta+\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \beta\lambda & \beta+\lambda \end{vmatrix} = \frac{\beta^{n+1}-\lambda^{n+1}}{\beta-\lambda},$$

donde, la matriz es de $n \times n$.

✍**40.** Use la regla de Cramer para encontrar el valor de x_3 en el sistema

$$\begin{cases} \alpha x_1 - \alpha x_2 + \beta x_3 & = \alpha + \beta \\ \beta x_1 - \beta x_2 + \alpha x_3 & = 0 \\ -\alpha x_1 + 2\beta x_2 + 3x_3 & = \alpha - \beta, \end{cases}$$

donde α y β son constantes $\alpha \neq \pm\beta$ y $\alpha \neq 2\beta$.

✍**41.** Use regla de Cramer para resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 & = & 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 & = & -1 \\ x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 2x_4 & = & 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 & = & -2 \end{cases}$$

✍**42.** Use regla de Cramer para resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 & = & 4 \\ x_1 - x_2 + x_4 & = & -2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 & = & 2 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 & = & 6 \end{cases}$$

✍**43.** Resolver el sistema:

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_5 & = & 2 \\ -4x_1 + 2x_2 + x_4 - 8x_5 & = & -1 \\ -x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 & = & 4 \\ x_1 + x_3 + x_4 - 2x_5 & = & 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_5 & = & 2 \end{cases}$$

Use la regla de Cramer.

✍**44.** *a*) Sea b_{jk} denota el cofactor de D_{jk} en la matriz D de $n \times n$. Pruebe que

$$\det\left(D^{(1)}, \ldots, D^{(k-1)}, e_j, D^{(k+1)}, \ldots, D^{(n)}\right) = b_{jk}$$

b) Demuestre que:

$$D \begin{bmatrix} b_{j1} \\ b_{j2} \\ \vdots \\ b_{jn} \end{bmatrix} = \det(D)e_j, \tag{6.64}$$

para $1 \leq j \leq n$.

c) Deduce que si B es la matrix tal que $B_{ij} = b_{ij}$, entonces $DB = \det(D)I_n$.

d) Demuestre que si $\det(D) \neq 0$, entonces $D^{-1} = [\det(D)]^{-1}B$

Bibliografía

[1] S. Andrilli and D. Hecker, "Systems of linear equations," in *Elementary Linear Algebra*, 4th ed. London WC1X 8RR,UK: Academic Press is an imprint of Elsevier, 2010, ch. 2, pp. 79–125.

[2] M. Anthony and M. Harvey, *Linear Algebra: Concepts and Methods*, 1st ed. Published in the United States of America by Cambridge University Press, New York: Cambridge University Press, 2012, pp. 1–512.

[3] A. Y. Aro Huanacuni, "Sistema de ecuaciones lineales," in *Álgebra Lineal I*, 1st ed., A. Y. A. Huanacuni, Ed. Puno: Impreso en Emer Impresores, 2018, ch. 1, pp. 1–56.

[4] M. Beck and R. Geoghegan, *The Art of Proof: Basic Training for Deeper Mathematics*, 1st ed. New York Dordrecht Heidelberg London: Springer, 2011, pp. 1–174. [Online]. Available: http://math.sfsu.edu/beck/papers/aop.noprint.pdf

[5] E. Beckenbach and R. Bellman, *An Introduction to Inequalities*, 13th ed. Published in Washington, D.C. by The Mathematical Association of America: Yale University, 1961, pp. 1–131.

[6] T. S. Blyth and E. F. Robertson, *Algebra through practice*, 1st ed. Printed in Great Britain at the University Press, Cambridge: Cambridge University Press, 1984, vol. 1, ch. 1-2, pp. 1–94.

[7] ——, "The algebra of matrices, some applications of matrices, systems of linear equations, invertible matrices," in *Matrices and Vector Spaces*, 2nd ed. University of St Andrews: Springer-Science+Business Media, B.V., 1986, vol. 2, ch. 1-5, pp. 1–43.

[8] A. Burgos, *Iniciación a la lógica matemática*, 1st ed. Avda. de Filipinas, 42, Madrid: Impreso en Selecciones gráficas, 1973, pp. 1–73.

[9] I. M. Copi and C. Cohen, *Introducción a la lógica*, 2nd ed. México: Limusa, 2013, pp. 3–703.

[10] Y. Corral de Franco and L. Manzanares, *Nociones Elementales de lógica matemática y teoría de conjuntos*, 1st ed. Caracas: Fondo editorial OPSU, 2018, pp. 13–163. [Online]. Available: http://mriuc.bc.uc.edu.ve/bitstream/handle/123456789/8375/ISBN-9789806604766.pdf?sequence=3

[11] H. T. Davis and K. T. Thomson, "General theory of solvability of linear algebraic equations," in *Linear Algebra and Linear Operators in Engineering with Applications in Mathematica*, 2nd ed. Printed in the United States of America: Academic Press, 2000, vol. 3, ch. 4, pp. 123–161.

[12] K. J. Devlin, "Sets and functions," in *Sets, Functions and Logic:Basic concepts of university mathematics*, 1st ed. London: Chapman and Hall, 1981, ch. 2, pp. 33–53.

[13] S. S. Epp, "La lógica de enunciados cuantificados," in *Matemáticas discretas con aplicaciones*, 4th ed. Mexico: Cengage Learning Editores, S. A., 2012, ch. 3, pp. 96–144.

[14] A. A. Ferreira Loureiro. Lógica de proposições quantificadas cálculo de predicados. Brasil. [Online]. Available: https://homepages.dcc.ufmg.br/~loureiro/

[15] R. Figueroa García, "Funciones," in *Análisis Matemático I*, 2nd ed. Jr. Loreto 1696 - Breña, Lima: Impreso en ediciones RFG, 2006, ch. 1, pp. 1–138.

[16] ——, *Vectores y Matrices con números complejos*, 1st ed. Lima, Perú: Impreso en Editora R.G.M., 2017, pp. 1–174.

[17] S. Friedberg, A. Insel, and L. Spence, "Determinants," in *Linear Algebra*, 2nd ed. London: Prentice-Hall, Inc., 1989, ch. 4, pp. 171–213.

[18] E. F. Haeussler, R. S. Paul, and R. J. Wood, *Matemáticas para administración y economía*, 12th ed. Impreso en México: Pearson Educación de México, S.A. de C.V., 2008, pp. 1–841.

[19] B. Kolman and D. R. Hill, *Elementary Linear Algebra with Applications*, 9th ed. Printed in the United States of America: Pearson Education, Inc., 2008, pp. 1–614.

[20] M. Lázaro Carrión, *Matemática Básica*, 1st ed. Lima-Perú: Moshera S.R.L., 2007, pp. 1–588.

[21] I. F. Mikenberg, *Álgebra e Introducción al Cálculo*, 1st ed. Chile: Pontificia Universidad Católica de Chile, 2013, pp. 1–464. [Online]. Available: https://www.ing.uc.cl/wp-content/uploads/2017/07/Prec%C3%A1lculo.pdf

[22] D. Rosales Papa, *Introducción a la Lógica*, 3rd ed. Lima: Editorial Amaru Editores, 1994, ch. 1, pp. 1–56.

[23] N. H. Shah and F. A. Thakkar, *Matrix and Determinant:Fundamentals and Applications*, 1st ed. Boca Raton: CRC Press, 2021, pp. 1–70.

[24] J. Stewart, L. Redlin, and S. Watson, *Precálculo. Matemáticas para el cálculo*, 7th ed. Impreso en México: Cengage Learning Editores, S.A. de C.V., 2017, pp. 1–888.

[25] P. Suppes and S. Hill, *Primer Curso de Lógica Matemática*. Mexico: Impreso ,The Editorial Reverté, S. A., 1963, pp. 1–279.

[26] J. A. Venero Baldeon, *Matemática básica*, 1st ed. Lima Perú: Gemar E.I.R.L., 2003, pp. 1–647.

[27] F. Zhang, "Deterininants, inverses and rank of matrices, and syste:ms of linear equations," in *Linear Algebra: Challenging Problems for Students*, 2nd ed. Printed in the United States of America: The Johns Hopkins Univetsity Press, 2009, ch. 2, pp. 21–44.

INUDI PERÚ
INSTITUTO UNIVERSITARIO DE INNOVACIÓN
CIENCIA Y TECNOLOGÍA

ISBN: 978-612-5069-21-4

9 786125 069214

EDITADA POR
INSTITUTO
UNIVERSITARIO
DE INNOVACIÓN CIENCIA
Y TECNOLOGÍA INUDI PERÚ