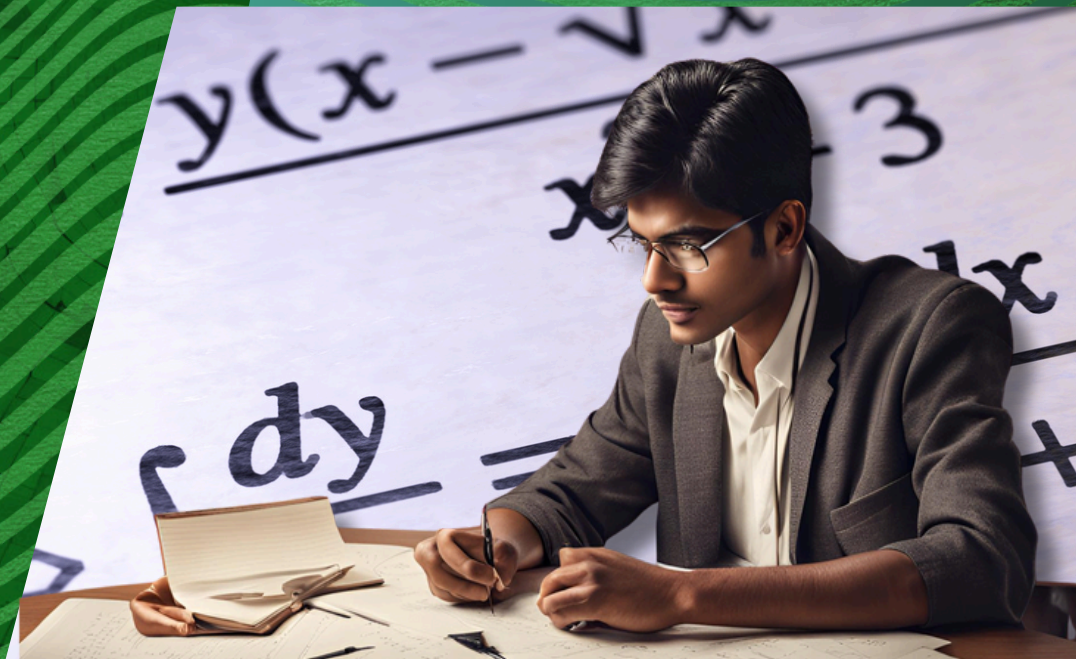


CÁLCULO II

Ciencias e Ingeniería

DOI: 10.35622/inudip.007



© Autores: Roger Ccama
Leonidas Vilca
John Lupaca
Fredy Copari
Alfredo Quispe
Juan Luna

CÁLCULO II: Ciencias e ingenierías

LIB-IP.007

DOI: <https://doi.org/10.35622/inudip.007>

**Roger Ccama
Leonidas Vilca
John Lupaca
Fredy Copari
Alfredo Quispe
Juan Luna**



Cálculo II: ciencias e ingenierías

Autores:

Roger Ccama Alejo
Leonidas Vilca Callata
John Williams Lupaca Quispe
Fredy Gonzalo Copari Romero
Alfredo Quispe Lujano
Juan Carlos Luna Quecaño

Primera edición digital
Publicado en Puno, septiembre de 2024

Libro electrónico disponible en:
<https://editorial.inudi.edu.pe/plus>

ISBN: 978-612-5130-44-0 (PDF)
Hecho el depósito legal en la Biblioteca Nacional del Perú N° 2024-08834
DOI: <https://doi.org/10.35622/inudip.007>
Categoría: Texto universitario

Editado por:

Instituto Universitario de Innovación Ciencia y Tecnología Inudi Perú S.A.C.
Urb. Ciudad Jardín Mz. B3 Lt. 2, Puno - Perú
RUC: 20608044818
Email: editorial@inudi.edu.pe / info@inudi.edu.pe
Teléfono: +51 973668341
Sitio web: <https://editorial.inudi.edu.pe>

Diseño de Portada:

Antonio Flores

Publicado en Perú / Posted in Peru



*Esta obra está bajo una licencia CC BY-NC-SA 4.0
DEED Atribución-NoComercial-CompartirIgual 4.0
Internacional*

Evaluación de contenido: No aplica.

Los autores son moral y legalmente responsables de la información expresada en este libro, así como del respeto a los derechos de autor; por lo tanto, no comprometen en ningún sentido a la editorial.

CONSEJO EDITORIAL

Director: Lic. Sergio Antonio Flores Vargas

Editor Jefe: Eddy Rodrigo Gonzales Huaman

Editores:

Dra. Bethzabe Cotrado Mendoza / Dra. Manuela Daishy Casa Coila / Dr. Edgar Estanislao Mancha Pineda / Dra. Luz Wilfreda Cusi Zamata / MSc. Rebeca Alanoca Gutiérrez / Dr. Wilson Gregorio Sucari Turpo / Dra. Yolanda Lujano Ortega / Dra. Sheyla Lenna Cervantes Alagón / Dra. Dometila Mamani Jilaja / Dr. Peregrino Melinton Lopez Paz / Dra. Nina Eleonor Vizcarra Herles / Mg. Lourdes Antonieta López Cueva / Dr. Carlos Alfredo Castro Quispe / Dr. Edgar Darío Callohuanca Avalos / Dra. Diana Águeda Vargas Velásquez / MSc. Yésica Dominga Díaz Vilcanqui / Dra. Tania Carola Padilla Cáceres / Patty Samanta Aza Suaña.

Declaración conflictos de interés:

Los autores de esta publicación declaran la inexistencia de conflictos de interés de cualquier índole con instituciones o asociaciones comerciales.

Financiamiento:

Publicación autofinanciada.



Director Ejecutivo

Dr. Wilson Gregorio Sucari Turpo

Director Académico

Lic. Sergio Antonio Flores Vargas

Director de Investigación

Dr. Pedro Carlos Huayanca Medina

**Director de Innovación y Transferencia
Tecnológica**

Lenin López Yucra

Prólogo

Bienvenidos al apasionante mundo del cálculo integral, una disciplina matemática que ha sido una fuente inagotable de conocimiento y aplicación en una amplia variedad de campos, desde la física y la ingeniería hasta la economía y las ciencias sociales. Este libro es un manual exhaustivo diseñado para ayudar a los estudiantes de ciencias e ingenierías a comprender y dominar los conceptos fundamentales de la integración.

La integración es una continuación natural de la diferenciación, y juntas forman el corazón del cálculo, una de las piedras angulares de las matemáticas. Mientras que la diferenciación se centra en el estudio de las tasas de cambio, la integración nos permite abordar problemas relacionados con la acumulación y la totalización. Desde el cálculo de áreas bajo curvas hasta la resolución de ecuaciones diferenciales, el cálculo integral se presenta como una herramienta poderosa y versátil para resolver una gran variedad de problemas en la vida real.

A lo largo de este libro, exploraremos los conceptos de antiderivadas, integrales indefinidas, diversas técnicas de integración, integrales definidas, áreas, volúmenes y longitud de arco. Trabajaremos juntos para desarrollar tu comprensión de estos conceptos, paso a paso, con ejemplos claros y ejercicios prácticos que te ayudarán a fortalecer tus habilidades.

Este libro está diseñado tanto para aquellos que están dando sus primeros pasos en el mundo del cálculo integral como para aquellos que desean profundizar en su conocimiento y aplicarlo en situaciones más avanzadas. Independientemente de tu nivel de experiencia, te animamos a abrazar el desafío del cálculo integral, ya que ofrece una ventana fascinante a la belleza y utilidad de las matemáticas.

Al final de cada capítulo, encontrarás problemas y ejercicios cuidadosamente seleccionados que te desafiarán a aplicar lo que has aprendido. No temas cometer errores; son oportunidades para aprender y mejorar. A medida que avanzas en el libro, te sorprenderás de lo que eres capaz de lograr.

Los autores.

Dedicatoria

*Dedico este libro a mi familia,
quienes han estado a mi lado durante
todo el tiempo que he trabajado en esta obra.
A mis amigos, quienes me han apoyado, y a todos los
que me prestaron ayuda: redactores, impresores y publicistas.
A todos ellos les dedico este libro con cariño y un profundo agradecimiento.*

Índice general

Índice general	3
1. Integral Indefinida	7
1.1. Conceptos básicos	7
1.2. Primeras fórmulas Básicas de Integración	9
1.3. Cambio de variables	9
1.4. Segunda fórmulas Básicas de Integración	38
1.5. Tercera Fórmulas Básicas de Integración	52
1.6. Cuarta fórmulas Básicas de Integración	65
2. Integración de funciones trigonométricas	81
2.1. Integrales de la forma: $\int \sin^m x \cos^n x dx$, con m y n pares positivo	83
2.2. Integrales de la forma: $\int \tan^n x dx$ o $\int \cot^n x dx$, con n entero positivo	94
2.3. Integrales de la forma: $\int \sec^n x dx$ o $\int \csc^n x dx$, con n entero par positivo.	95
2.4. Integrales de la forma:	96
3. Métodos de Integración	101
3.1. Integración por partes	101
3.2. Integración por sustitución Trigonométrica	119
3.3. Integración de Funciones Racionales	134
3.4. Integrales de funciones racionales trigonométricas	143
4. Integral Definida	151
4.1. Teorema fundamental del Cálculo	151
4.2. Propiedades de la Integral Definida	152
4.3. Aplicación a Areas de Regiones Planas	153

4.4. Aplicación a volúmenes de sólidos de revolución	178
4.5. Aplicación a Longitud de arco	182
4.6. Aplicación a área de una superficie de revolución	186

Bibliografía	191
---------------------	------------

Capítulo 1

Integral Indefinida

El objetivo del cálculo diferencial es conociendo una función cualquiera determinar su derivada. El proceso inverso de este hecho, dada la derivada hallar la función que dio lugar a esta derivada (llamada primitiva o antiderivada) se le llama integración y el símbolo que se utiliza es \int . Por ejemplo:

$$g(x) = 3x^2 \text{ es una antiderivada de } f(x) = 6x, \text{ pues } g'(x) = f(x)$$

1.1. Conceptos básicos

Definición

La función $F(x)$, se llama la antiderivada o primitiva de $f(x)$, si $F'(x) = f(x)$.

Ejemplo

Consideremos $F(x) = x^3 + 3x$ y $f(x) = 3x^2 + 3$, se tiene que $F(x)$ es la antiderivada de $f(x)$, pues $F'(x) = f(x)$.

Observación:

Tenemos que:

$F_1(x) = x^2 + 2x$ es la antiderivada de $f(x) = 2x + 2$, pues $F_1'(x) = f(x)$

$F_2(x) = x^2 + 2x - 3$ es la antiderivada de $f(x) = 2x + 2$, pues $F_2'(x) = f(x)$

$F_3(x) = x^2 + 2x + 4$ es la antiderivada de $f(x) = 2x + 2$, pues $F_3'(x) = f(x)$

En general se cumple:

$G(x) = x^2 + 2x + c$ es la antiderivada de $f(x) = 2x + 2$, pues $G'(x) = f(x)$

Definición

Si $F(x)$ es la antiderivada de $f(x)$, entonces la función:

$$G(x) = F(x) + c,$$

se denomina antiderivada general de $f(x)$.

Al proceso del cálculo de antiderivadas generales se llama integración, como se expresa en la siguiente definición.

Definición

Si $F(x)$ es la antiderivada de $f(x)$, entonces a su antiderivada general $G(x) = F(x) + c$ se denota por:

$$G(x) = \int f(x)dx = F(x) + c$$

Al cual le llamaremos la integral indefinida de $f(x)$.

Nota:

En toda integral indefinida, a la función $f(x)$ se le llama función integrante, y a la variable x se le llama variable de integración y a la constante c se le llama constante de integración.

Ejemplos

1. Calcular $\int (4x^3 + 3x^2) dx$

Resolución

Como $\frac{d}{dx}(x^4 + x^3) = 4x^3 + 3x^2$, entonces $\int (4x^3 + 3x^2) dx = x^4 + x^3 + c$

2. Calcular $\int \cos x dx$

Resolución

Como $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$, entonces $\int \cos x dx = \sin x + c$

Nota:

La integral indefinida goza la propiedad de linealidad

1. $\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$

2. $\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$

1.2. Primeras fórmulas Básicas de Integración

1. $\int dx = x + c$

2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \quad n \neq -1$

3. $\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + c$

1.3. Cambio de variables

Dada la función $f : I \mapsto \mathbb{R}$ queremos calcular $\int f(x) dx$, se hace un cambio de variable $x = u(t)$ y cómo $dx = u'(t) dt$, se verifica

$$\int f(x) dx = \int f(u(t)) u'(t) dt$$

. Al final se reemplaza su expresión en función de x .

Ejercicios Resueltos

Resolver las siguientes integrales indefinidas

1 $\int x(a - bx^3)dx$

Resolución

Como $x(a - bx^3) = ax - bx^4$ se tiene:

$$\int x(a - bx^3)dx = \int (ax - bx^4)dx = a \int xdx - b \int x^4dx = a \frac{x^2}{2} - b \frac{x^5}{5} + c$$

2 $\int (x - \sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} + 1)dx$

Resolución

Como $(x - \sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} + 1) = x^{3/2} + 1$, entonces:

$$\int (x - \sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} + 1)dx = \int (x^{3/2} + 1)dx = \frac{2x^{5/2}}{5} + x + c$$

3 $\int \frac{x^3 + 5x^2 - 4}{x^3}dx$

Resolución

Tenemos que

$$\frac{x^3 + 5x^2 - 4}{x^3} = 1 + \frac{5}{x} - \frac{4}{x^3} = 1 + \frac{5}{x} - 4x^{-3}$$

Luego

$$\int \frac{x^3 + 5x^2 - 4}{x^3}dx = \int \left(1 + \frac{5}{x} - 4x^{-3}\right)dx = x + 5 \ln |x| + \frac{2}{x^2} + c$$

4 $\int (x^3 + 2)^2 3x^2 dx$

Resolución

Hacemos $u = x^3 + 2 \rightarrow du = 3x^2 dx$, luego

$$\int (x^3 + 2)^2 3x^2 dx = \int u^2 du = \frac{u^3}{3} = \frac{(x^3 + 2)^3}{3} + c$$

5 $I = \int \left(x + \frac{1}{x}\right)^{3/2} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \cdot dx$

Resolución

Sea:

$$\bullet u = x + \frac{1}{x} \implies du = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) dx$$

$$\begin{aligned} I &= \int u^{3/2} du = \frac{2}{5} u^{5/2} + C \\ &= \frac{2}{5} \left(x + \frac{1}{x}\right)^{5/2} + C \end{aligned}$$

6 $\int \frac{xdx}{\sqrt[4]{x^2 + 2}}$

Resolución

Hacemos $u = x^2 + 2 \rightarrow du = 2xdx \rightarrow \frac{du}{2} = xdx$

Luego

$$\int \frac{xdx}{\sqrt[4]{x^2 + 2}} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{\sqrt[4]{u}} = \frac{1}{2} \int u^{-1/4} du = \frac{2}{3} u^{3/4} = \frac{2}{3} (x^2 + 2)^{3/4} + c$$

7 $\int \frac{dx}{x + 4}$

Resolución

Hacemos $u = x + 4 \rightarrow du = dx$, luego

$$\int \frac{dx}{x + 4} = \int \frac{du}{u} = \ln |u| = \ln |x + 4| + c$$

8 $\int \frac{x^2 + 2}{x + 1} dx$

Resolución

Tenemos que

$$\frac{x^2 + 2}{x + 1} = x - 1 + \frac{3}{x + 1}$$

Luego

$$\int \frac{x^2 + 2}{x + 1} dx = \int \left(x - 1 + \frac{3}{x + 1} \right) dx = \frac{x^2}{2} - x + 3 \ln |x + 1| + c$$

$$\textcircled{9} \quad I = \int \left(1 - \frac{1}{x^2} \right) \sqrt{x \cdot \sqrt{x}} \cdot dx$$

Resolución

$$\begin{aligned} I &= \int \left(\frac{x^2 - 1}{x^2} \right) x^{1/2} \cdot x^{1/4} \cdot dx = \int (x^2 - 1) x^{-5/4} \cdot dx \\ &= \int (x^{3/4} - x^{-5/4}) dx \\ &= \frac{4}{7} x^{7/4} - 4x^{-1/4} + C \end{aligned}$$

$$\textcircled{10} \quad I = \int (x^2 - 4x + 4)^{4/3} \cdot dx$$

Resolución

$$\begin{aligned} I &= \int [(x - 2)^2]^{4/3} \cdot dx = \int (x - 2)^{8/3} \cdot dx \\ &= \frac{3}{11} (x - 2)^{11/3} + C \end{aligned}$$

$$\textcircled{11} \quad I = \int \frac{(x + 1)(x - 2)}{\sqrt{x}} dx$$

Resolución

$$\begin{aligned} I &= \int x^{-1/2} (x^2 - x - 2) dx \\ &= \int (x^{3/2} - x^{1/2} - 2x^{-1/2}) dx \\ &= \frac{2}{5} x^{5/2} - \frac{2}{3} x^{3/2} - 4x^{1/2} + C \end{aligned}$$

$$\textcircled{12} \quad I = \int \sqrt{2px} \, dx$$

Resolución

$$\begin{aligned} I &= \int \sqrt{2p} \sqrt{x} dx \\ &= \sqrt{2p} \int x^{1/2} dx \\ &= \sqrt{2p} \frac{x^{3/2}}{3/2} + C \\ &= \frac{2\sqrt{2p}x^{3/2}}{3} + C \end{aligned}$$

13 $I = \int \frac{dx}{\sqrt[n]{x}}$

Resolución

$$\begin{aligned} I &= \int x^{-1/n} dx \\ &= \frac{x^{-1/n+1}}{-1/n+1} + C \\ &= \frac{nx^{\frac{n-1}{n}}}{n-1} + C \end{aligned}$$

14 $I = \int (nx)^{\frac{1-n}{n}} dx$

Resolución

$$\begin{aligned} I &= \int n^{\frac{1-n}{n}} \cdot x^{\frac{1-n}{n}} dx \\ &= n^{\frac{1-n}{n}} \int x^{\frac{1-n}{n}} dx \\ &= n^{\frac{1-n}{n}} \int x^{\frac{1}{n}-1} dx \\ &= n^{\frac{1-n}{n}} \cdot \frac{x^{1/n}}{1/n} + C \\ &= n^{\frac{1-n}{n}} \cdot n \cdot x^{1/n} + C \\ &= n^{\frac{1-n+n}{n}} \cdot x^{1/n} + C \\ &= n^{1/n} \cdot x^{1/n} + C \\ &= \sqrt[n]{nx} + C \end{aligned}$$

15 $I = \int \frac{x-1}{x+1} \cdot dx$

Resolución

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x+1-2}{x+1} \cdot dx \\ &= \int \frac{x+1}{x+1} \cdot dx - 2 \int \frac{dx}{x+1} \\ &= x - 2 \ln|x+1| + C \end{aligned}$$

16 $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}}$

Resolución

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{(\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1})}{(\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1})(\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1})} dx \\ &= \int \frac{(\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1})}{x-1-x-1} dx \\ &= \int \frac{(\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1})}{-2} dx \\ &= -\frac{1}{2} \int \sqrt{x-1} dx + \frac{1}{2} \int \sqrt{x+1} dx \\ &= -\frac{1}{3}(x-1)^{3/2} + \frac{1}{3}(x+1)^{3/2} + C \\ &= \frac{1}{3} [(x+1)^{3/2} - (x-1)^{3/2}] + C \end{aligned}$$

17 $I = \int (x^3 + 3)^{1/4} x^5 \cdot dx$

Resolución

Sea:

$\begin{aligned} \bullet \quad u &= (x^3 + 3)^{1/4} \implies u^4 = x^3 + 3 \implies x^3 = u^4 - 3 \\ &\implies 4u^3 du = 3x^2 dx \\ &\implies \frac{4}{3} u^3 du = x^2 dx \end{aligned}$
--

Entonces:

$$\begin{aligned} I &= \int (x^3 + 3)^{1/4} x^3 \cdot x^2 \cdot dx = \int u(u^4 - 3)^{1/4} u^3 du \\ &= \frac{4}{3} \int (u^4 - 3)u^4 du = \frac{4}{3} \int (u^8 - 3u^4) du \\ &= \frac{4}{3} \left(\frac{u^9}{9} - \frac{3}{5} u^5 \right) + C \\ &= \frac{4}{27} (x^3 + 3)^{9/4} - \frac{4}{5} (x^3 + 3)^{5/4} + C \end{aligned}$$

$$18 \quad I = \int \sqrt{3+x}(x+1)^2 \cdot dx$$

Resolución

Sea:

$$\begin{aligned} \bullet \quad u = \sqrt{3+x} &\implies u^2 = x+3 \implies x = u^2 - 3 \\ &\implies 2udu = dx \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} I &= \int u(u^2 - 3 + 1)^2 (2u) \cdot du \\ &= 2 \int (u^4 - 4u^2 + 4)u^2 du \\ &= 2 \int (u^6 - 4u^4 + 4u^2) du \\ &= 2 \left(\frac{u^7}{7} - \frac{4u^5}{5} + \frac{4u^3}{3} \right) + C \\ &= \frac{2}{7} (x+3)^{7/2} - \frac{8}{5} (x+3)^{5/2} + \frac{8}{3} (x+3)^{3/2} + C \end{aligned}$$

$$19 \quad I = \int \sqrt{1 + \frac{1}{2x}} \cdot x^{-3} dx$$

Resolución

Sea:

$$\begin{aligned} \bullet \quad u = \sqrt{1 + \frac{1}{2x}} &\implies u^2 = 1 + \frac{1}{2x} \implies \frac{1}{x} = 2(u^2 - 1) \\ &\implies 2udu = -\frac{1}{2x^2} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I &= \int u \cdot 2(u^2 - 1)(-4u)du = -8 \int (u^2 - 1)u^2 du \\
&= -8 \int (u^4 - u^2) du \\
&= -8 \left(\frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3} \right) + C \\
&= \frac{8}{3} \left(1 + \frac{1}{2x} \right)^{3/2} - \frac{8}{5} \left(1 + \frac{1}{2x} \right)^{5/2} + C
\end{aligned}$$

20 $I = \int \frac{dx}{e^x + 1}$

Resolución

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{1 + e^x - e^x}{e^x + 1} dx \\
&= \int \frac{e^x + 1}{e^x + 1} dx - \int \frac{e^x}{e^x + 1} dx \\
&= \int dx - \int \frac{e^x}{e^x + 1} dx
\end{aligned}$$

Sea : $\boxed{\bullet u = e^x + 1 \implies du = e^x dx}$

Entonces:

$$\begin{aligned}
I &= x - \int \frac{du}{u} \\
&= x - \ln |u| + C \\
&= x - \ln |e^x + 1| + C
\end{aligned}$$

21 $I = \int \sqrt{3-x} \cdot x^2 \cdot dx$

Resolución

Sea:

$$\boxed{\bullet u = \sqrt{3-x} \implies u^2 = 3-x \implies x = 3-u^2} \\
\implies 2udu = -dx$$

$$\begin{aligned}
I &= \int u \cdot (3 - u^2)^2 (-2u du) \\
&= -2 \int (3 - u^2)^2 u^2 du \\
&= -2 \int (9 - 6u^2 + u^4) u^2 du \\
&= -2 \int (9u^2 - 6u^4 + u^6) du \\
&= -2 \left(\frac{9u^3}{3} - \frac{6u^5}{5} + \frac{u^7}{7} \right) + C \\
&= \frac{-6u^3}{1} + \frac{12u^5}{5} - \frac{2u^7}{7} + C \\
&= -6(3 - x)^{3/2} + \frac{12}{5}(3 - x)^{5/2} - \frac{2}{7}(3 - x)^{7/2} + C
\end{aligned}$$

22 $I = \int \frac{9e^x}{e^{2x} + 2e^x + 1} dx$

Resolución

$$I = \int \frac{9e^x}{(e^x)^2 + 2e^x + 1} dx = 9 \int \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} dx$$

Sea:

• $u = e^x + 1 \implies du = e^x dx$

Entonces:

$$\begin{aligned}
I &= 9 \int \frac{du}{u^2} = 9 \int u^{-2} du \\
&= 9 \left(\frac{-1}{u} \right) + c \\
&= \frac{-9}{e^x + 1} + c
\end{aligned}$$

23 $I = \int \frac{x^{2/3} + x^4 e^{\operatorname{sen} 3x} \cos 3x + x^3}{x^4} dx$

Resolución

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{x^{2/3}}{x^4} dx + \int e^{\operatorname{sen} 3x} \cos 3x dx + \int \frac{dx}{x} \\
&= \int x^{-10/3} dx + \int e^{\operatorname{sen} 3x} \cos 3x dx + \ln |x| + C
\end{aligned}$$

Sea:

$$\begin{aligned} \bullet \quad u = e^{\operatorname{sen} 3x} &\implies \ln u = \operatorname{sen} 3x \\ &\implies \frac{du}{u} = 3 \cos 3x dx \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} I &= \frac{-3}{7}x^{-7/3} + \frac{1}{3} \int u \frac{du}{u} + \ln |x| + C \\ &= \frac{-3}{7}x^{-7/3} + \frac{1}{3}u + \ln |x| + C \\ &= \frac{-3}{7}x^{-7/3} + \frac{1}{3}e^{\operatorname{sen} 3x} + \ln |x| + C \end{aligned}$$

$$\textcircled{24} \quad I = \int \frac{x \ln(1+x^2)}{1+x^2} dx$$

Resolución

Sea:

$$\begin{aligned} \bullet \quad u = \ln(1+x^2) &\implies du = \frac{1}{1+x^2} \cdot 2x dx \\ &\implies \frac{du}{2} = \frac{x}{1+x^2} dx \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} I &= \int u \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \int u du \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{u^2}{2} + C \\ &= \frac{u^2}{4} + C \\ &= \frac{\ln^2(1+x^2)}{4} + C \end{aligned}$$

$$\textcircled{25} \quad I = \int \frac{\operatorname{senh} x}{(1 + \cosh x)^3} dx$$

Resolución

Sea:

$$\bullet \quad u = 1 + \cosh x \implies du = \operatorname{senh} x \cdot dx$$

Entonces:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{du}{u^3} = \int u^{-3} du \\ &= \frac{u^{-2}}{-2} + c \\ &= \frac{-1}{2u^2} + c \\ &= -\frac{1}{2(1 + \cosh x)^2} + C \end{aligned}$$

26 $I = \int \frac{dx}{x \ln^2 x}$

Resolución

Sea:

$$\bullet \quad u = \ln x \implies du = \frac{1}{x} \cdot dx$$

Entonces:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{du}{u^2} = \int u^{-2} du \\ &= \frac{u^{-1}}{-1} + c \\ &= \frac{-1}{u} + c \\ &= -\frac{1}{\ln x} + C \end{aligned}$$

27 $I = \int x \sqrt{2x^2 + 3} \cdot dx$

Resolución

Sea:

$$\bullet \quad u = 2x^2 + 3 \implies du = 4x dx$$

Entonces:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{4} \int \sqrt{2x^2 + 3} \cdot 4x dx = \frac{1}{4} \int u^{1/2} du \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{u^{3/2}}{3/2} \right) + c \\ &= \frac{1}{6} (2x^2 + 3)^{3/2} + c \end{aligned}$$

28 $I = \int \frac{3tdt}{\sqrt[3]{t^2 + 3}} \cdot dt$

Resolución

Sea:

$$\bullet u = t^2 + 3 \implies du = 2tdt$$

Entonces:

$$\begin{aligned} I &= \frac{3}{2} \int \frac{2tdt}{\sqrt[3]{t^2 + 3}} = \frac{3}{2} \int \frac{du}{u^{1/3}} \\ &= \frac{3}{2} \int u^{-1/3} du \\ &= \frac{3}{2} \left(\frac{u^{2/3}}{2/3} \right) + C \\ &= \frac{9}{4} \sqrt[3]{(t^2 + 3)^2} + c \end{aligned}$$

29 $I = \int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}} \cdot dx$

Resolución

Sea:

$$\begin{aligned} \bullet u = \sqrt{x} &\implies u^2 = x \\ &\implies 2udu = dx \end{aligned}$$

Entonces:

$$I = \int \frac{1+u^2}{1+u} \cdot 2udu = 2 \int \frac{u^3+u}{u+1} du$$

Por división de polinomios:

$$\begin{aligned} I &= 2 \int (u^2 - u + 2) - 2 \int \frac{du}{u+1} \\ &= 2 \left(\frac{u^3}{3} - \frac{u^2}{2} + 2u \right) - 2 \ln |u+1| + C \\ &= 2 \left(\frac{\sqrt{x^3}}{3} - \frac{x}{2} + 2\sqrt{x} \right) - 2 \ln |\sqrt{x}+1| + C \end{aligned}$$

30 $I = \int \frac{\cot x dx}{\operatorname{sen}^7 x + 1}$

Resolución

$$I = \int \frac{\cos x dx}{\operatorname{sen} x (\operatorname{sen}^7 x + 1)} = \int \frac{\cos x \cdot \operatorname{sen}^6 x \cdot dx}{\operatorname{sen}^7 (\operatorname{sen}^7 x + 1)}$$

Sea:

- $u = \operatorname{sen}^7 x + 1$
- $du = 7 \operatorname{sen}^6 x \cdot \cos x \cdot dx$
- $\frac{du}{7} = \cos x \cdot \operatorname{sen}^6 x \cdot dx$

Entonces:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{7} \int \frac{du}{(u-1)u} = \frac{1}{7} \int \frac{(1-u+u)du}{(u-1)u} \\ &= \frac{1}{7} \int \frac{-(u-1)du}{(u-1)u} + \frac{1}{7} \int \frac{udu}{(u-1)u} \\ &= -\frac{1}{7} \int \frac{du}{u} + \frac{1}{7} \int \frac{du}{u-1} \\ &= -\frac{1}{7} \ln |u| + \frac{1}{7} \ln |u-1| + C \\ &= \frac{1}{7} \ln \left| \frac{u-1}{u} \right| + C \\ &= \frac{1}{7} \ln \left| \frac{\operatorname{sen}^7 x + 1 - 1}{\operatorname{sen}^7 x + 1} \right| + C \\ &= \frac{1}{7} \ln \left| \frac{\operatorname{sen}^7 x}{\operatorname{sen}^7 x + 1} \right| + C \end{aligned}$$

31 $I = \int \frac{e^x(1+x \ln x)}{x} dx$

Resolución

$$I = \int \left(\frac{e^x}{x} + e^x \ln x \right) dx$$

Sea:

- $u = e^x \ln x \implies du = \left(\frac{e^x}{x} + e^x \ln x \right) dx$

Entonces:

$$\begin{aligned} I &= \int du \\ &= u + C \\ &= e^x \ln x + C \end{aligned}$$

$$32 \quad I = \int \frac{x^x(x \ln^2 x + x \ln x - 1)}{x \ln^2 x} dx$$

Resolución

Sea:

$$\begin{aligned} \bullet \quad u &= \frac{x^x}{\ln x} \\ \implies du &= \left(\frac{\ln x(x \cdot x^{x-1} + x^x \ln x) - x^x \cdot \frac{1}{x}}{\ln^2 x} \right) dx \\ \implies du &= \left(\frac{x^x \ln x + x^x \ln^2 x - x^x \cdot \frac{1}{x}}{\ln^2 x} \right) dx \\ \implies du &= \frac{x^x(x \ln x + x \ln^2 x - 1)}{x \ln^2 x} dx \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} I &= \int du \\ &= u + C \\ &= \frac{x^x}{\ln x} + C \end{aligned}$$

$$33 \quad I = \int x(2x + 5)^{10} dx$$

Resolución

Sea:

$$\begin{aligned} \bullet \quad u &= 2x + 5 \implies x = \frac{u - 5}{2} \\ \implies \frac{du}{2} &= dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I &= \int \left(\frac{u - 5}{2} \right) \cdot u^{10} \cdot \frac{du}{2} = \frac{1}{4} \int (u^{11} - 5u^{10}) du \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{u^{12}}{12} - \frac{5u^{11}}{11} \right) + C \\ &= \frac{(2x + 5)^{12}}{48} - \frac{5}{44} (2x + 5)^{11} + C \end{aligned}$$

$$34 \quad I = \int \frac{dx}{\sqrt{x}(1 - \sqrt{x})}$$

Resolución

Sea:

$$\begin{aligned} \bullet \quad u = 1 - \sqrt{x} &\implies du = -\frac{dx}{2\sqrt{x}} \\ &\implies -2du = \frac{dx}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{-2du}{u} \\ &= -2 \int \frac{du}{u} \\ &= -2 \ln |u| + C \\ &= -2 \ln |1 - \sqrt{x}| + C \end{aligned}$$

35 $I = \int \frac{dx}{x(x^7 + 1)^2}$

Resolución

$$I = \int \frac{dx}{x(x^7 + 1)^2} = \frac{1}{7} \int \frac{7x^6 dx}{x^6 \cdot x(x^7 + 1)^2} = \frac{1}{7} \int \frac{7x^6 dx}{x^7(x^7 + 1)^2}$$

Sea:

$$\bullet \quad u = x^7 + 1 \implies du = 7x^6 dx$$

Entonces:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{7} \int \frac{du}{u^2(u-1)} \\ &= \frac{1}{7} \int \frac{1}{u^2(u-1)} du \\ &= \frac{1}{7} \int \frac{u^2 + 1 - u^2}{u^2(u-1)} du \\ &= \frac{1}{7} \int \left[\frac{u^2 - (u^2 - 1)}{u^2(u-1)} \right] du \\ &= \frac{1}{7} \int \left[\frac{u^2}{u^2(u-1)} - \frac{u^2 - 1}{u^2(u-1)} \right] du \\ &= \frac{1}{7} \int \left[\frac{1}{u-1} - \frac{(u+1)(u-1)}{u^2(u-1)} \right] du \\ &= \frac{1}{7} \int \left[\frac{1}{u-1} - \frac{u+1}{u^2} \right] du \\ &= \frac{1}{7} \int \left[\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u} - \frac{1}{u^2} \right] du \\ &= \frac{1}{7} \left[\ln(u-1) - \ln u + \frac{1}{u} \right] + C \\ &= \frac{1}{7} \left[\ln \left(\frac{u-1}{u} \right) + \frac{1}{u} \right] + C \\ &= \frac{1}{7} \left[\ln \left(\frac{x^7}{x^7+1} \right) + \frac{1}{x^7+1} \right] + C \end{aligned}$$

36 $I = \int \left(z + (z + (z + \dots + \infty)^9)^9 \right)^9 dz$

Resolución

Sea:

$$\begin{aligned} \bullet \quad u &= z + \left(\underbrace{z + (z + \dots + \infty)^9}_u \right)^9 \\ \implies u &= z + u^9 \\ \implies z &= u - u^9 \\ \implies dz &= (1 - 9u^8) du \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} I &= \int u^9 (1 - 9u^8) du \\ &= \int (u^9 - 9u^{17}) du \\ &= \frac{u^{10}}{10} - \frac{u^{18}}{2} + C \\ &= \frac{1}{10} \left(\left(z + (z + (z + \dots + \infty)^9)^9 \right)^9 \right)^{10} \\ &\quad - \frac{1}{2} \left(\left(z + (z + (z + \dots + \infty)^9)^9 \right)^9 \right)^{18} + C \end{aligned}$$

37 $I = \int \frac{\ln \sqrt{x + \sqrt{x^2 + 1}}}{\sqrt{x^2 + 1}} \cdot dx$

Resolución

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\ln (x + \sqrt{x^2 + 1})^{1/2}}{\sqrt{x^2 + 1}} dx \\ I &= \frac{1}{2} \int \frac{\ln (x + \sqrt{x^2 + 1})}{\sqrt{x^2 + 1}} dx \end{aligned}$$

Sea:

$$\begin{aligned} u &= \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \\ du &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot \left[1 + \frac{1}{2}(x^2 + 1)^{-1/2}(2x) \right] dx \\ du &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot \left[\frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right] dx \\ du &= \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}} \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int u \, du \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{u^2}{2} \right) + C \\ &= \frac{u^2}{4} + C \\ &= \frac{1}{4} \left(\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \right)^2 + C \\ &= \left(\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \right)^{2/4} + C \\ &= \sqrt{\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})} + C \end{aligned}$$

38 $I = \int \frac{x^5 dx}{x^3 - 8}$

Resolución

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x^5 - 8x^2 + 8x^2}{x^3 - 8} dx \\ &= \int \frac{x^5 - 8x^2}{x^3 - 8} dx + 8 \int \frac{x^2}{x^3 - 8} dx \\ &= \int \frac{x^2(x^3 - 8)}{x^3 - 8} dx + 8 \int \frac{x^2}{x^3 - 8} dx \\ &= \int x^2 dx + 8 \int \frac{x^2}{x^3 - 8} dx \end{aligned}$$

Sea:

$\begin{aligned} \bullet \quad u = x^3 - 8 &\implies du = 3x^2 dx \\ &\implies \frac{du}{3} = x^2 dx \end{aligned}$

Entonces:

$$\begin{aligned} I &= \frac{x^3}{3} + 8 \int \frac{du}{3u} = \frac{x^3}{3} + \frac{8}{3} \ln|u| + C \\ &= \frac{x^3}{3} + \frac{8}{3} \ln|x^3 - 8| + C \\ &= \frac{1}{3} (x^3 + \ln|x^3 - 8|^8) + C \end{aligned}$$

39 $I = \int \frac{dx}{x(x^2 - 8)}$

Resolución

Si:

- $-\frac{1}{8}(x^2 - x^2 - 8) = -\frac{1}{8}(x^2 - 8) + \frac{1}{8}x^2$

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{(-\frac{1}{8}(x^2 - 8) + \frac{1}{8}x^2)dx}{x(x^2 - 8)} \\ &= -\frac{1}{8} \int \frac{x^2 - 8}{x(x^2 - 8)} dx + \frac{1}{8} \int \frac{x^2}{x(x^2 - 8)} dx \\ &= -\frac{1}{8} \int \frac{dx}{x} + \frac{1}{8} \int \frac{x}{x^2 - 8} dx \end{aligned}$$

Sea:

- $u = x^2 - 8 \implies du = 2x dx$

Entonces:

$$\begin{aligned} I &= -\frac{1}{8} \ln x + \frac{1}{16} \int \frac{du}{u} \\ &= -\frac{2}{16} \ln x + \frac{1}{16} \ln u + c \\ &= -\frac{\ln x^2}{16} + \frac{1}{16} \ln(x^2 - 8) + c \\ &= \frac{1}{16} \ln\left(\frac{x^2 - 8}{x^2}\right) + c \end{aligned}$$

40 $I = \int \frac{dx}{\operatorname{sen} 2x (\ln \tan x)}$

Resolución

Sea:

- $u = \ln \tan x \implies du = \frac{\sec^2 x}{\tan x} dx$
 $\implies du = \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right) \cos^2 x} dx$
 $\implies du = \frac{1}{\operatorname{sen} x \cos x}$

Entonces:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{2 \operatorname{sen} x \cdot \cos x (\ln \tan x)} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\operatorname{sen} x \cdot \cos x (\ln \tan x)} \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} \\ &= \frac{1}{2} \ln |u| + C \\ &= \frac{1}{2} \ln |\ln \tan x| + C \end{aligned}$$

41 $I = \int \sqrt{1 + \cos x} dx$

Resolución

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\sqrt{1 + \cos x} \cdot \sqrt{1 - \cos x}}{\sqrt{1 - \cos x}} dx = \int \frac{\sqrt{1 - \cos^2 x}}{\sqrt{1 - \cos x}} dx \\ &= \int \frac{\sqrt{\operatorname{sen}^2 x}}{\sqrt{1 - \cos x}} dx \\ &= \int \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{1 - \cos x}} dx \end{aligned}$$

Sea:

$$\bullet \quad u = 1 - \cos x \implies du = \operatorname{sen} x dx$$

Entonces:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{du}{u^{1/2}} = \int u^{-1/2} du \\ &= 2u^{1/2} + C \\ &= 2\sqrt{1 - \cos x} + C \end{aligned}$$

42 $I = \int \frac{\arctan \sqrt{x}}{\sqrt{x + 2x^2 + x^3}} dx$

Resolución

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\arctan \sqrt{x}}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{1 + 2x + x^2}} dx = \int \frac{\arctan \sqrt{x}}{\sqrt{x} \sqrt{(1+x)^2}} dx \\ &= \int \frac{\arctan \sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)} dx \end{aligned}$$

Sea:

$$\begin{aligned} u = \arctan(\sqrt{x}) &\implies du = \frac{1}{1 + (\sqrt{x})^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \\ &\implies 2du = \frac{1}{\sqrt{x} \cdot (1+x)} dx \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} I &= \int u \cdot 2du = 2 \int u du \\ &= 2 \cdot \frac{u^2}{2} + C \\ &= (\arctan \sqrt{x})^2 + C \end{aligned}$$

43 $I = \int x^{2 \operatorname{sen} x - 1} (\operatorname{sen} x + x \cos x \cdot \ln x) dx$

Resolución

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x^{2 \operatorname{sen} x}}{x} (\operatorname{sen} x + x \cos x \cdot \ln x) dx \\ &= \int x^{2 \operatorname{sen} x} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} + \cos x \cdot \ln x \right) dx \end{aligned}$$

Sea:

$$\begin{aligned} \bullet \quad u &= x^{2 \operatorname{sen} x} \implies \ln u = 2 \operatorname{sen} x \cdot \ln x \\ &\implies \frac{du}{u} = 2 \left(\cos x \cdot \ln x + \frac{\operatorname{sen} x}{x} \right) dx \\ &\implies \frac{du}{2u} = \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} + \cos x \cdot \ln x \right) dx \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} I &= \int u \left(\frac{du}{2u} \right) = \frac{1}{2} \int du \\ &= \frac{1}{2} u + C \\ &= \frac{1}{2} x^{2 \operatorname{sen} x} + C \end{aligned}$$

44 $I = \int \frac{\ln x}{x^3 (\ln x - 1)^3} dx$

Resolución

$$I = \int \frac{\ln x}{[x(\ln x - 1)]^3} dx = \int \frac{\ln x}{(x \ln x - x)^3} dx$$

Sea:

$$\begin{aligned} \bullet \quad u = x \ln x - x &\implies du = (\ln x + 1 - 1)dx \\ &\implies du = \ln x dx \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{du}{u^3} = \int u^{-3} du \\ &= \frac{u^{-2}}{-2} + C \\ &= -\frac{1}{2u^2} + C \\ &= -\frac{1}{2(x \ln x - x)^2} + C \\ &= -\frac{1}{2x^2(\ln x - 1)^2} + C \end{aligned}$$

$$45 \quad I = \int \frac{2x - \sqrt{\arcsen x}}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

Resolución

$$I = \int \frac{2x dx}{\sqrt{1-x^2}} - \int \frac{\sqrt{\arcsen x}}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

Sea:

$$\begin{aligned} \bullet \quad u = \sqrt{1-x^2} &\implies u^2 = 1-x^2 \\ &\implies 2udu = -2x dx \\ &\implies -udu = x dx \\ \bullet \quad v = \sqrt{\arcsen x} &\implies v^2 = \arcsen x \\ &\implies 2v dv = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} I &= 2 \int \frac{-udu}{u} - \int 2v dv \cdot v \\ &= -2 \int du - 2 \int v^2 dv \\ &= -2u - \frac{2}{3}v^3 + C \\ &= -2\sqrt{1-x^2} - \frac{2}{3}\sqrt{(\arcsen x)^3} + C \end{aligned}$$

$$46 \quad I = \int \frac{x \ln x - (1+x^2) \arctan x}{x(1+x^2) \ln^2 x} dx$$

Resolución

Sea:

$$\begin{aligned} \bullet \quad u &= \frac{\arctan x}{\ln x} \\ \Rightarrow du &= \left(\frac{\frac{1}{1+x^2} \ln x - \frac{1}{x} \arctan x}{\ln^2 x} \right) dx \\ \Rightarrow \int du &= \int \left(\frac{x \ln x - (1+x^2) \arctan x}{x(1+x^2) \ln^2 x} \right) dx \\ \Rightarrow u &= \int \left(\frac{x \ln x - (1+x^2) \arctan x}{x(1+x^2) \ln^2 x} \right) dx \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} I &= u \\ &= \frac{\arctan x}{\ln x} + C \end{aligned}$$

47 $I = \int \frac{dx}{x(x^{\overline{bbb}} + 1)^2}$; Siendo \overline{bbb} el máximo número de tres cifras.

Resolución

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{x(x^{999} + 1)^2} \\ &= \frac{1}{999} \int \frac{999x^{998} dx}{x^{998} \cdot x(x^{999} + 1)^2} \\ &= \frac{1}{999} \int \frac{999x^{998} dx}{x^{999}(x^{999} + 1)^2} \end{aligned}$$

Sea:

$$\bullet \quad u = x^{999} + 1 \Rightarrow du = 999x^{998} dx$$

Entonces:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{999} \int \frac{du}{u^2(u-1)} \\ &= \frac{1}{999} \int \frac{1}{u^2(u-1)} du \\ &= \frac{1}{999} \int \frac{u^2 + 1 - u^2}{u^2(u-1)} du \\ &= \frac{1}{999} \int \left[\frac{u^2 - (u^2 - 1)}{u^2(u-1)} \right] du \\ &= \frac{1}{999} \int \left[\frac{u^2}{u^2(u-1)} - \frac{u^2 - 1}{u^2(u-1)} \right] du \\ &= \frac{1}{999} \int \left[\frac{1}{u-1} - \frac{(u+1)(u-1)}{u^2(u-1)} \right] du \\ &= \frac{1}{999} \int \left[\frac{1}{u-1} - \frac{u+1}{u^2} \right] du \\ &= \frac{1}{999} \int \left[\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u} - \frac{1}{u^2} \right] du \\ &= \frac{1}{999} \left[\ln(u-1) - \ln u + \frac{1}{u} \right] + C \\ &= \frac{1}{999} \left[\ln(x^{999}) - \ln(x^{999} + 1) + \frac{1}{x^{999} + 1} \right] + C \\ &= \frac{999}{999} \ln x - \frac{1}{999} \ln(x^{999} + 1) + \frac{1}{999(x^{999} + 1)} + C \\ &= \ln x - \frac{1}{999} \ln(x^{999} + 1) + \frac{1}{999(x^{999} + 1)} + C \end{aligned}$$

$$12 \int \frac{x dx}{\sqrt{x+3}} = \frac{2}{3}(x+3)^{3/2} - 6(x+3)^{1/2} + c$$

$$13 \int \frac{3 dx}{1+2x} = \frac{3}{2} \ln |1+2x| + c$$

$$14 \int \frac{x^2 dx}{1-x^3} = -\frac{1}{3} \ln |1-x^3| + c$$

$$15 \int \frac{x-1}{x+1} dx = x - 2 \ln |x+1| + c$$

Resolución

$$16 \int \frac{2x^3}{x^2-4} dx = x^2 + 4 \ln |x^2-4| + c$$

$$17 \int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1} dx = \frac{1}{2} \ln |e^{2x}+1| + c$$

1.4. Segunda fórmulas Básicas de Integración

1. $\int e^x dx = e^x + c$

2. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c, \quad a > 0$

Ejercicios Resueltos

Encontrar las siguientes integrales

1 $\int 2^{5x} dx$

Resolución

Hacemos $u = 5x \rightarrow du = 5dx \rightarrow \frac{du}{5} = dx$, luego

$$\int 2^{5x} dx = \int 2^u \frac{du}{5} = \frac{1}{5} \int 2^u du = \frac{1}{5} \left(\frac{2^u}{\ln 2} \right) = \frac{2^{5x}}{5 \ln 2} + c$$

2 $\int e^{2-3x} dx$

Resolución

Hacemos $u = 2 - 3x \rightarrow du = -3dx \rightarrow -\frac{du}{3} = dx$, luego

$$\int e^{2-3x} dx = \int e^u \left(-\frac{du}{3}\right) = -\frac{1}{3} \int e^u du = -\frac{1}{3} e^u = -\frac{1}{3} e^{2-3x} + c$$

3 $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$

Resolución

Hacemos $u = \sqrt{x} \rightarrow du = \frac{dx}{2\sqrt{x}} \rightarrow 2du = \frac{dx}{\sqrt{x}}$, luego

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \int e^u (2du) = 2e^u = 2e^{\sqrt{x}} + c$$

4 $\int \frac{dx}{e^{x/2} + e^x}$

Resolución

Hacemos $u = \frac{x}{2} \rightarrow du = \frac{dx}{2} \rightarrow 2du = dx$, luego

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{e^{x/2} + e^x} &= \int \frac{2du}{e^u + e^{2u}} \\ &= 2 \int \frac{e^{-2u} du}{e^{-u} + 1} \\ &= 2 \int \left(e^{-u} - 1 + \frac{1}{e^{-u} + 1} \right) du \\ &= 2(-e^{-u} - u + \ln(1 + e^u)) \\ &= -2e^{-x/2} - x + 2 \ln(1 + e^{x/2}) + c\end{aligned}$$

5 $I = \int 4^x e^x dx$

Resolución

$$\begin{aligned}I &= \int (4 \cdot e)^x dx \\ &= \frac{(4e)^x}{\ln(4e)} + C \\ &= \frac{(4e)^x}{\ln 4 + \ln e} + C \\ &= \frac{4^x e^x}{\ln 4 + 1} + C\end{aligned}$$

6 $I = \int \frac{2^x \cdot 3^{x+1}}{5^{x+2}} dx$

Resolución

$$\begin{aligned}I &= \int \frac{2^x \cdot 3^x \cdot 3}{5^x \cdot 5^2} dx \\ &= \frac{3}{25} \int \frac{2^x \cdot 3^x}{5^x} dx \\ &= \frac{3}{25} \int \left(\frac{6}{5} \right)^x dx \\ &= \frac{3}{25} \cdot \frac{\left(\frac{6}{5} \right)^x}{\ln \left(\frac{6}{5} \right)} + C \\ &= \frac{3}{25 \ln \left(\frac{6}{5} \right)} \cdot \left(\frac{6}{5} \right)^x + C\end{aligned}$$

7 $I = \int \frac{(a^x - b^x)^2}{a^x b^x} dx$

Resolución

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{a^{2x} - 2a^x b^x + b^{2x}}{a^x b^x} dx \\ &= \int \left[\frac{a^x}{b^x} - 2 + \frac{b^x}{a^x} \right] dx \\ &= \int \left[\left(\frac{a}{b} \right)^x - 2 + \left(\frac{b}{a} \right)^x \right] dx \\ &= \frac{(a/b)^x}{\ln(a/b)} - 2x + \frac{(b/a)^x}{\ln(b/a)} + C \\ &= \frac{(a/b)^x}{\ln a - \ln b} - 2x + \frac{(b/a)^x}{\ln b - \ln a} + C \\ &= \frac{(a/b)^x}{\ln a - \ln b} - 2x - \frac{(b/a)^x}{\ln a - \ln b} + C \\ &= \frac{\frac{a^x}{b^x} - \frac{b^x}{a^x}}{\ln a - \ln b} - 2x + C \\ &= \frac{\left(\frac{a^{2x} - b^{2x}}{a^x b^x} \right)}{\ln a - \ln b} - 2x + C \end{aligned}$$

8 $I = \int e^{e^x} e^{e^x+x} dx$

Resolución

Por cambio de variable sea:

$$\bullet \quad u = e^x \implies du = e^x dx$$

Entonces:

$$I = \int e^{e^x} e^{e^x} e^x dx = \int e^{e^u} e^u du$$

Luego otro cambio de variable sea:

$$\bullet \quad w = e^u \implies dw = e^u du$$

Entonces:

$$\begin{aligned} I &= \int e^w dw = e^w + C \\ &= e^{e^x} + C \\ &= e^{e^{e^x}} + C \end{aligned}$$

9 $I = \int e^{2x-5} dx$

Resolución

Sea:

$$\begin{aligned} \bullet \quad u &= 2x - 5 \implies du = 2dx \\ &\implies \frac{du}{2} = dx \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} I &= \int e^u \left(\frac{du}{2}\right) = \frac{1}{2} \int e^u du \\ &= \frac{1}{2} e^u + c \\ &= \frac{1}{2} e^{2x-5} + c \end{aligned}$$

10 $I = \int e^{x \ln x} (\ln x + 1) dx$

Resolución

Sea: $u = x \ln x \Rightarrow du = (\ln x + 1) dx$

$$\begin{aligned} I &= \int e^u du \\ &= e^u + c = e^{x \ln x} + c = x^x + c \end{aligned}$$

11 $I = \int x^{2x} (\ln x + 1) dx$

Resolución

$$I = \int x^x \cdot x^x (\ln x + 1) dx$$

Sea:

$$\begin{aligned} \bullet \quad u = x^x &\implies \ln u = x \ln x \\ &\implies \frac{du}{u} = (\ln x + 1)dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I &= \int u \cdot u \cdot \frac{du}{u} = \int u du \\ &= \frac{u^2}{2} + C \\ &= \frac{(x^x)^2}{2} + C \\ &= \frac{x^{2x}}{2} + C \end{aligned}$$

$$\textcircled{12} \quad I = \int \frac{3^{\tanh x}}{\cosh^2 x} \cdot dx$$

Resolución

$$I = \int 3^{\tanh x} \cdot \sec h^2 x \cdot dx$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad u &= \tanh x \\ du &= \sec h^2 x \, dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I &= \int 3^u du \\ &= \frac{3^u}{\ln 3} + C \\ &= \frac{3^{\tanh x}}{\ln 3} + C \end{aligned}$$

$$\textcircled{13} \quad I = \int \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}}$$

Resolución

$$I = \int \frac{e^x dx}{e^x \sqrt{e^x - 1}}$$

Sea:

$$\begin{aligned} \bullet \quad u = \sqrt{e^x - 1} &\implies u^2 = e^x - 1 \implies e^x = u^2 + 1 \\ &\implies 2u du = e^x dx \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{2udu}{u(u^2 + 1)} = 2 \int \frac{du}{u^2 + 1} \\ &= 2 \arctan(u) + C \\ &= 2 \arctan(\sqrt{e^x - 1}) + C \end{aligned}$$

14 $I = \int \frac{\ln 2x}{\ln 4x} \cdot \frac{dx}{x}$

Resolución

$$I = \int \frac{\ln x + \ln 2}{\ln x + \ln 4} \cdot \frac{dx}{x}$$

Sea:

$$\bullet \quad u = \ln x \implies du = \frac{dx}{x}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{u + \ln 2}{u + \ln 4} \cdot du = \int \frac{u + \ln 2 + \ln 4 - \ln 4}{u + \ln 4} \cdot du \\ &= \int \frac{u + \ln 4}{u + \ln 4} \cdot du + \int \frac{\ln 2 - \ln 4}{u + \ln 4} \cdot du \\ &= \int du - \int \frac{\ln 2}{u + \ln 4} \cdot du \\ &= u - \ln 2 \int \frac{du}{u + \ln 4} \\ &= u - \ln 2 \cdot \ln |u + \ln 4| + C \\ &= \ln x - \ln 2 \cdot \ln |\ln x + \ln 4| + C \\ &= \ln x - \ln 2 \cdot \ln |\ln 4x| + C \end{aligned}$$

15 $I = \int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x + 1}} dx$

Resolución

$$I = \int \frac{e^x \cdot e^x}{\sqrt{e^x + 1}} dx$$

Sea:

$$\begin{aligned} \bullet \quad u &= \sqrt{e^x + 1} \implies u^2 = e^x + 1 \implies e^x = u^2 - 1 \\ &\implies 2udu = e^x dx \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{(u^2 - 1) \cdot 2udu}{u} = 2 \int (u^2 - 1) du \\ &= 2 \left(\frac{u^3}{3} - u \right) + C \\ &= \frac{2}{3} (\sqrt{e^x + 1})^3 - 2\sqrt{e^x + 1} + C \end{aligned}$$

16 $I = \int \frac{2e^x + e^{-x}}{3e^x - 4e^{-x}} dx$

Resolución

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{e^x(2e^x + e^{-x})}{e^x(3e^x - 4e^{-x})} dx \\ &= \int \frac{2e^{2x} + 1}{3e^{2x} - 4} dx \\ &= \int \frac{2e^{2x}}{3e^{2x} - 4} dx + \int \frac{dx}{3e^{2x} - 4} \\ &= \int \frac{2e^{2x}}{3e^{2x} - 4} dx + \int \frac{e^{-2x} dx}{e^{-2x}(3e^{2x} - 4)} \\ &= \int \frac{2e^{2x}}{3e^{2x} - 4} dx + \int \frac{e^{-2x} dx}{3 - 4e^{-2x}} \end{aligned}$$

Sea:

<ul style="list-style-type: none">$u = 3e^{2x} - 4 \implies du = 3e^{2x}(2)dx$ $\implies \frac{du}{6} = e^{2x} dx$$v = 3 - 4e^{-2x} \implies dv = -4e^{-2x}(-2)dx$ $\implies \frac{dv}{8} = e^{-2x} dx$
--

Entonces:

$$\begin{aligned} I &= 2 \int \frac{du}{6u} + \int \frac{dv}{8v} = \frac{2}{6} \int \frac{du}{u} + \frac{1}{8} \int \frac{dv}{v} \\ &= \frac{1}{3} \ln |u| + \frac{1}{8} \ln |v| + C \\ &= \ln |u|^{1/3} + \ln |v|^{1/8} + C \\ &= \ln (|u|^{1/3} \cdot |v|^{1/8}) + C \\ &= \ln (\sqrt[3]{u} \cdot \sqrt[8]{v}) + C \\ &= \ln (\sqrt[3]{3e^{2x} - 4} \cdot \sqrt[8]{3 - 4e^{-2x}}) + C \end{aligned}$$

17 $I = \int \frac{dx}{2^x + 3}$

Resolución

$$I = \int \frac{2^{-x} dx}{1 + 3 \cdot 2^{-x}}$$

Sea:

$$\begin{aligned} \bullet \quad u &= 1 + 3 \cdot 2^{-x} \implies du = 3 \cdot 2^{-x} \cdot \ln 2 (-dx) \\ &\implies \frac{-du}{3 \ln 2} = 2^{-x} dx \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} I &= -\frac{1}{3 \ln 2} \int \frac{du}{u} = -\frac{1}{\ln 8} \ln |u| + C \\ &= -\frac{\ln |1 + 3 \cdot 2^{-x}|}{\ln 8} + C \end{aligned}$$

18 $I = \int \frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x} dx$

Resolución

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{2^x \cdot 2 - \frac{5^x}{5}}{10^x} dx \\ &= \int \frac{2^x \cdot 10 - 5^x}{5 \cdot 10^x} dx \\ &= \int \frac{2^x \cdot 10}{5 \cdot 10^x} dx - \frac{1}{5} \int \frac{5^x}{10^x} dx \\ &= 2 \int \left(\frac{2}{10}\right)^x dx - \frac{1}{5} \int \left(\frac{5}{10}\right)^x dx \\ &= 2 \int \left(\frac{1}{5}\right)^x dx - \frac{1}{5} \int \left(\frac{1}{2}\right)^x dx \\ &= 2 \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^x}{\ln\left(\frac{1}{5}\right)} - \frac{1}{5} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} + C \\ &= 2 \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^x}{\ln 1 - \ln 5} - \frac{1}{5} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x}{\ln 1 - \ln 2} + C \\ &= -2 \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^x}{\ln 5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x}{\ln 2} + C \end{aligned}$$

19 $I = \int \frac{(a^x - b^x)^2}{a^x b^x} dx$

Solución

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{a^{2x} - 2a^x b^x + b^{2x}}{a^x b^x} dx \\
&= \int \left[\frac{a^x}{b^x} - 2 + \frac{b^x}{a^x} \right] dx \\
&= \int \left[\left(\frac{a}{b}\right)^x - 2 + \left(\frac{b}{a}\right)^x \right] dx \\
&= \frac{(a/b)^x}{\ln(a/b)} - 2x + \frac{(b/a)^x}{\ln(b/a)} + C \\
&= \frac{(a/b)^x}{\ln a - \ln b} - 2x + \frac{(b/a)^x}{\ln b - \ln a} + C \\
&= \frac{(a/b)^x}{\ln a - \ln b} - 2x - \frac{(b/a)^x}{\ln a - \ln b} + C \\
&= \frac{\frac{a^x}{b^x} - \frac{b^x}{a^x}}{\ln a - \ln b} - 2x + C \\
&= \frac{\left(\frac{a^{2x} - b^{2x}}{a^x b^x}\right)}{\ln a - \ln b} - 2x + C
\end{aligned}$$

20 $I = \int e^{e^{e^x}} e^{e^x+x} dx$

Solución

Por cambio de variable sea:

$$\bullet \quad u = e^x \implies du = e^x dx$$

Entonces:

$$I = \int e^{e^{e^x}} e^{e^x} e^x dx = \int e^{e^u} e^u du$$

Luego otro cambio de variable sea:

$$\bullet \quad w = e^u \implies dw = e^u du$$

Entonces:

$$\begin{aligned} I &= \int e^w dw = e^w + C \\ &= e^{e^x} + C \\ &= e^{e^{e^x}} + C \end{aligned}$$

21 $I = \int \frac{9e^x}{e^{2x} + 2e^x + 1} dx$

Solución

$$I = \int \frac{9e^x}{(e^x)^2 + 2e^x + 1} dx = 9 \int \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} dx$$

Sea:

$$\bullet \quad u = e^x + 1 \implies du = e^x dx$$

Entonces:

$$\begin{aligned} I &= 9 \int \frac{du}{u^2} = 9 \int u^{-2} du \\ &= 9 \left(\frac{-1}{u} \right) + c \\ &= \frac{-9}{e^x + 1} + c \end{aligned}$$

Ejercicios Propuestos

Utilizando las formulas, verifique las siguientes igualdades

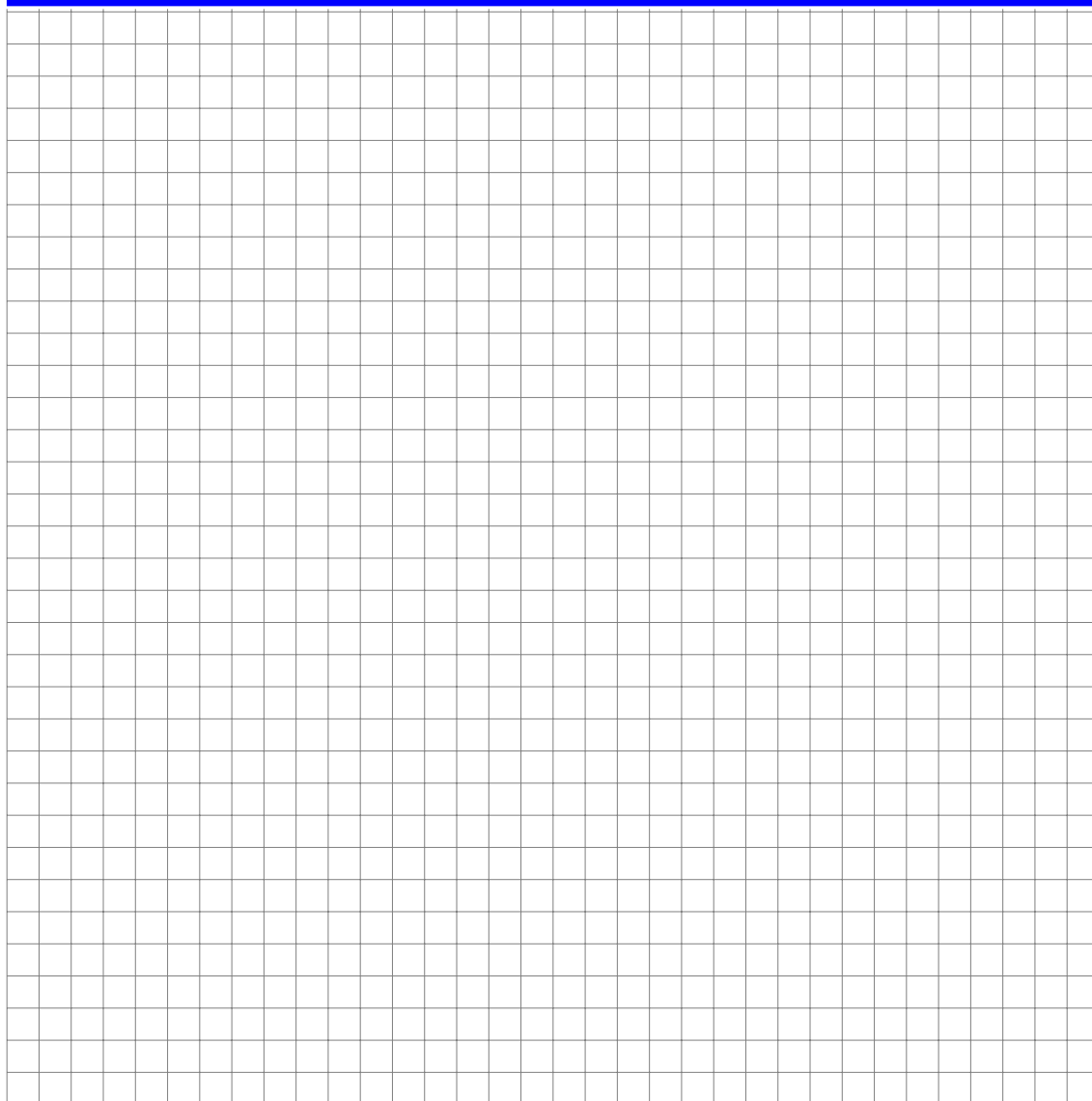
$$1 \quad \int e^{5x} dx = \frac{1}{5}e^{5x} + c$$

$$2 \quad \int xe^{-x^2} dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + c$$

$$3 \quad \int \frac{e^{1/x}}{x^2} dx = -e^{1/x} + c$$

$$4 \quad \int e^{1/x^2} x^{-3} dx = -\frac{1}{2}e^{1/x^2} + c$$

Resolución



$$5 \quad \int (e^x - x^e) dx = e^x - \frac{x^{e+1}}{e+1} + c$$

$$\textcircled{6} \int (e^x + 1)^2 e^x dx = \frac{1}{3}(e^x + 1)^3 + c$$

$$\textcircled{7} \int \frac{1 + e^{2x}}{e^x} dx = e^x - e^{-x} + c$$

$$\textcircled{8} \int \frac{e^{3x} + 1}{e^x + 1} dx = \frac{1}{2}e^{2x} - e^x + x + c$$

$$\textcircled{9} \int \frac{e^{2x}}{e^x + 3} dx = e^x - 3 \ln(e^x + 3) + c$$

Resolución



$$\textcircled{10} \int \frac{2^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \frac{2^{1+\sqrt{x}}}{\ln 2} + c$$

$$\textcircled{11} \int a^x e^x dx = \frac{a^x e^x}{1 + \ln a} + c$$

12 $\int \frac{9^x - 4^x}{2^x 3^x} dx = \frac{1}{\ln 3 - \ln 2} \left[\left(\frac{3}{2}\right)^x + \left(\frac{2}{3}\right)^x \right] + c$

Resolución

A large grid of graph paper, consisting of approximately 30 columns and 40 rows of small squares, intended for the student to write their solution to the problem.

1.5. Tercera Fórmulas Básicas de Integración

$$1. \int \operatorname{sen} x dx = -\cos x + c$$

$$2. \int \cos x dx = \operatorname{sen} x + c$$

$$3. \int \tan x dx = -\ln |\cos x| + c = \ln |\sec x| + C$$

$$4. \int \cot x dx = \ln |\operatorname{sen} x| + c$$

$$5. \int \sec x dx = \ln |\sec x + \tan x| + c$$

$$6. \int \csc x dx = \ln |\csc x - \cot x| + c$$

$$7. \int \sec^2 x dx = \tan x + c$$

$$8. \int \csc^2 x dx = -\cot x + c$$

$$9. \int \sec x \tan x dx = \sec x + c$$

$$10. \int \csc x \cot x dx = -\csc x + c$$

Ejercicios Resueltos

$$1 \int \cos 4x dx$$

Resolución

Hacemos $u = 4x \rightarrow du = 4dx \rightarrow \frac{du}{4} = dx$, luego

$$\int \cos 4x dx = \int \cos u \left(\frac{du}{4}\right) = \frac{1}{4} \int \cos u du = \frac{1}{4} \operatorname{sen} u = \frac{1}{4} \operatorname{sen} 4x + c$$

$$2 \int (x-2) \operatorname{sen}(x^2 - 4x + 5) dx$$

Resolución

Sea $u = x^2 - 4x + 5 \rightarrow du = 2(x - 2)dx \rightarrow \frac{du}{2} = (x - 2)dx$, reemplazando en la integral:

$$\int (x - 2) \operatorname{sen}(x^2 - 4x + 5) dx = \int \operatorname{sen} u \frac{du}{2} = -\frac{\cos u}{2} = -\frac{\cos(x^2 - 4x + 5)}{2} + c$$

3 $\int \frac{x \tan(\sqrt{x^2 + 4})}{\sqrt{x^2 + 4}} dx$

Resolución

Sea $u = \sqrt{x^2 + 4} \rightarrow du = \frac{xdx}{\sqrt{x^2 + 4}}$, reemplazando en la integral dada:

$$\int \frac{\tan(\sqrt{x^2 + 4})x}{\sqrt{x^2 + 4}} dx = \int \tan u du = -\ln |\cos u| = -\ln |\cos(\sqrt{x^2 + 4})| + c$$

4 $\int \frac{\cot(\ln x)}{x} dx$

Resolución

Sea $u = \ln x \rightarrow du = \frac{dx}{x}$, reemplazando en la integral dada.

$$\int \frac{\cot(\ln x)}{x} dx = \int \cot u du = \ln |\operatorname{sen} u| = \ln |\operatorname{sen}(\ln x)| + c$$

5 $I = \int \frac{dx}{\cos^2(1 - 4x)}$

Resolución

Sea:

$$\begin{aligned} \bullet \quad u = 1 - 4x &\implies du = -4dx \\ &\implies -\frac{du}{4} = dx \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{-\frac{du}{4}}{\cos^2 u} = -\frac{1}{4} \int \sec^2 u du \\ &= -\frac{1}{4} \tan u + c \\ &= -\frac{1}{4} \tan(1 - 4x) + c \end{aligned}$$

6 $I = \int \frac{dx}{1 + \cos 10x}$

Resolución

$$I = \int \frac{dx}{1 + \cos 2(5x)}$$

Si:

$$\bullet \cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$$

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{1 + \cos 2(5x)} = \int \frac{dx}{1 + \cos^2 5x - \operatorname{sen}^2 5x} \\ &= \int \frac{dx}{1 + \cos^2 5x - 1 + \cos^2 5x} \\ &= \int \frac{dx}{2 \cos^2 5x} \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\cos^2 5x} \\ &= \frac{1}{2} \int \sec^2 5x dx \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\tan 5x}{5} \right) + C \\ &= \frac{1}{10} \tan 5x + C \end{aligned}$$

7 $I = \int \frac{x \cos x}{(x \operatorname{sen} x + \cos x - 1)^m} dx$

Resolución

Sea:

$$\bullet u = x \operatorname{sen} x + \cos x - 1 \implies du = x \cos x dx$$

Entonces:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{du}{u^m} \\ &= \int u^{-m} du \\ &= \frac{u^{-m+1}}{-m+1} + C \\ &= \frac{(x \operatorname{sen} x + \cos x - 1)^{1-m}}{1-m} + C \end{aligned}$$

$$8 \quad I = \int \frac{\operatorname{sen} x \cdot \cos x}{\sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 x + b^2 \cos^2 x}} dx$$

Resolución

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\operatorname{sen} x \cdot \cos x}{\sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 x + b^2(1 - \operatorname{sen}^2 x)}} dx \\ &= \int \frac{\operatorname{sen} x \cdot \cos x}{\sqrt{(a^2 - b^2) \operatorname{sen}^2 x + b^2}} dx \end{aligned}$$

$$\text{Sea : } \left\{ \begin{array}{l} u = (a^2 - b^2) \operatorname{sen}^2 x + b^2 \\ \implies du = 2(a^2 - b^2) \operatorname{sen} x \cdot \cos x dx \\ \implies \frac{du}{2(a^2 - b^2)} = \operatorname{sen} x \cdot \cos x \cdot dx \end{array} \right.$$

Entonces:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{\sqrt{u}} \cdot \left(\frac{du}{2(a^2 - b^2)} \right) \\ &= \frac{1}{2(a^2 - b^2)} \int u^{-1/2} du \\ &= \frac{1}{2(a^2 - b^2)} \cdot \frac{u^{1/2}}{1/2} + C \\ &= \frac{1}{(a^2 - b^2)} \cdot u^{1/2} + C \\ &= \frac{1}{(a^2 - b^2)} \cdot \sqrt{(a^2 - b^2) \operatorname{sen}^2 x + b^2} + C \\ &= \frac{1}{(a^2 - b^2)} \cdot \sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 x + b^2 \cos^2 x} + C \end{aligned}$$

$$9 \quad I = \int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\sqrt{\cos x}} dx$$

Resolución

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\operatorname{sen}^2 x \cdot \operatorname{sen} x}{\sqrt{\cos x}} dx \\ &= \int \frac{(1 - \cos^2 x) \cdot \operatorname{sen} x}{\sqrt{\cos x}} dx \end{aligned}$$

Sea :

$$\begin{aligned} \bullet \quad u = \sqrt{\cos x} &\implies u^2 = \cos x \\ &\implies 2udu = -\operatorname{sen} x dx \\ &\implies -2udu = \operatorname{sen} x dx \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{(1-u^4)(-2udu)}{u} \\ &= -2 \int (1-u^4) du \\ &= -2 \left(u - \frac{u^5}{5} \right) + C \\ &= -2\sqrt{\cos x} + \frac{2}{5}(\sqrt{\cos x})^5 + C \end{aligned}$$

10 $I = \int \sec^2(\cos(\ln x)) \cdot \frac{\operatorname{sen}(\ln x)}{x} dx$

Resolución

Sea:

$$\begin{aligned} \bullet \quad u = \cos(\ln x) &\implies du = -\operatorname{sen}(\ln x) \frac{1}{x} dx \\ &\implies -du = \frac{\operatorname{sen}(\ln x)}{x} dx \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} I &= - \int \sec^2 u du = -\tan u + C \\ &= -\tan(\cos(\ln x)) + C \end{aligned}$$

11 $I = \int \frac{1 + \tan x}{\operatorname{sen} 2x} dx$

Resolución

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1 + \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{2 \operatorname{sen} x \cdot \cos x} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{\cos x + \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x \cdot \cos^2 x} dx \\ &= \int \frac{\cos x}{2 \operatorname{sen} x \cdot \cos^2 x} dx + \frac{1}{2} \int \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x \cdot \cos^2 x} dx \\ &= \int \frac{dx}{2 \operatorname{sen} x \cdot \cos x} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{\cos^2 x} dx \\ &= \int \frac{dx}{\operatorname{sen} 2x} + \frac{1}{2} \int \sec^2 x dx \\ &= \int \csc 2x dx + \frac{1}{2} \tan x \\ &= \frac{1}{2} \ln |\csc 2x - \cot 2x| + \frac{1}{2} \tan x + C \\ &= \frac{1}{2} (\tan x + \ln |\csc 2x - \cot 2x|) + C \end{aligned}$$

12 $I = \int \sqrt{1 + \operatorname{sen} x} dx$

Resolución

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\sqrt{1 + \operatorname{sen} x} \cdot \sqrt{1 - \operatorname{sen} x}}{\sqrt{1 - \operatorname{sen} x}} dx \\ &= \int \frac{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x}}{\sqrt{1 - \operatorname{sen} x}} dx \\ &= \int \frac{\sqrt{\cos^2 x}}{\sqrt{1 - \operatorname{sen} x}} dx \\ &= \int \frac{\cos x}{\sqrt{1 - \operatorname{sen} x}} dx \end{aligned}$$

Sea:

$\begin{aligned} \bullet \quad u &= 1 - \operatorname{sen} x \implies du = -\cos x dx \\ &\implies -du = \cos x dx \end{aligned}$

Entonces:

$$\begin{aligned} I &= -\int \frac{du}{u^{1/2}} = -\int u^{-1/2} du \\ &= -2u^{1/2} + C \\ &= -2\sqrt{1 - \operatorname{sen} x} + C \end{aligned}$$

13 $I = \int \frac{dx}{1 + \operatorname{sen} x}$

Resolución

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{1 + \operatorname{sen} x} = \int \frac{(1 - \operatorname{sen} x)dx}{1 - \operatorname{sen}^2 x} \\ &= \int \frac{(1 - \operatorname{sen} x)dx}{\cos^2 x} \\ &= \int \sec^2 x dx - \int \frac{\operatorname{sen} x dx}{\cos^2 x} \end{aligned}$$

Sea:

$$\bullet \quad u = \cos x \implies du = -\operatorname{sen} x dx \implies -du = \operatorname{sen} x dx$$

Entonces:

$$\begin{aligned} I &= \tan x + \int \frac{du}{u^2} = \tan x + \int u^{-2} du \\ &= \tan x + \frac{u^{-1}}{-1} + C \\ &= \tan x - \frac{1}{u} + C \\ &= \tan x - \frac{1}{\cos x} + C \\ &= \tan x - \sec x + C \end{aligned}$$

14 $I = \int \frac{\cos^3 x}{1 - \operatorname{sen} x} dx$

Resolución

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\cos^3 x}{1 - \operatorname{sen} x} dx \\ &= \int \frac{\cos^3 x(1 + \operatorname{sen} x)}{(1 - \operatorname{sen} x)(1 + \operatorname{sen} x)} dx \\ &= \int \frac{\cos^3 x(1 + \operatorname{sen} x)}{1 - \operatorname{sen}^2 x} dx \\ &= \int \frac{\cos^3 x(1 + \operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} dx \\ &= \int \cos x(1 + \operatorname{sen} x) dx \end{aligned}$$

Sea:

$$\bullet \quad u = 1 + \operatorname{sen} x \implies du = \cos x dx$$

Entonces:

$$\begin{aligned} I = \int u du &= \frac{u^2}{2} + C \\ &= \frac{(1 + \operatorname{sen} x)^2}{2} + C \end{aligned}$$

15 $I = \int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x \cdot \sqrt[3]{\cot x - 1}}$

Resolución

$$I = \int \frac{\operatorname{csc}^2 x dx}{\sqrt[3]{\cot x - 1}}$$

Sea:

$$\begin{aligned} \bullet \quad u &= \sqrt[3]{\cot x - 1} \implies u^3 = \cot x - 1 \\ \bullet \quad 3u^2 du &= -\operatorname{csc}^2 x dx \implies -3u^2 du = \operatorname{csc}^2 x dx \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} I = \int \frac{-3u^2 du}{u} &= -3 \int u du \\ &= -3 \left(\frac{u^2}{2} \right) + C \\ &= -\frac{3}{2} (\cot x - 1)^{2/3} + C \end{aligned}$$

16 $I = \int \frac{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 3x + \dots + \operatorname{sen} nx}{\operatorname{cos} x + \operatorname{cos} 2x + \operatorname{cos} 3x + \dots + \operatorname{cos} nx} \cdot dx$

Solución

Se sabe que:

<ul style="list-style-type: none">• $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 3x + \dots + \operatorname{sen} nx = \frac{\operatorname{sen} \left(\frac{nx}{2}\right)}{\operatorname{sen} \left(\frac{x}{2}\right)} \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{n+1}{2}x\right)$• $\operatorname{cos} x + \operatorname{cos} 2x + \operatorname{cos} 3x + \dots + \operatorname{cos} nx = \frac{\operatorname{sen} \left(\frac{nx}{2}\right)}{\operatorname{sen} \left(\frac{x}{2}\right)} \cdot \operatorname{cos} \left(\frac{n+1}{2}x\right)$

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\frac{\operatorname{sen} \left(\frac{nx}{2}\right)}{\operatorname{sen} \left(\frac{x}{2}\right)} \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\frac{\operatorname{sen} \left(\frac{nx}{2}\right)}{\operatorname{sen} \left(\frac{x}{2}\right)} \cdot \operatorname{cos} \left(\frac{n+1}{2}x\right)} \cdot dx \\ &= \int \frac{\operatorname{sen} \left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\operatorname{cos} \left(\frac{n+1}{2}x\right)} \cdot dx \\ &= \int \tan \left(\frac{n+1}{2}x\right) \cdot dx \\ &= -\frac{2}{n+1} \ln \left(\operatorname{cos} \frac{n+1}{2}x\right) + C \end{aligned}$$

Ejercicios Propuestos

Calcular las siguientes integrales inmediatas

$$\textcircled{1} \int \operatorname{sen} \frac{x}{2} dx = -2 \cos \frac{x}{2} + c$$

$$\textcircled{3} \int x \cot x^2 dx = \frac{1}{2} \ln(\operatorname{sen} x^2) + c$$

$$\textcircled{2} \int \cos^2 x \operatorname{sen} x dx = -\frac{1}{3} \cos^3 x + c$$

$$\textcircled{4} \int x^2 \sec^2 x^3 dx = \frac{1}{3} \tan x^3 + c$$

$$\textcircled{5} \int \frac{\sec \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = 2 \ln(\sec \sqrt{x} + \tan \sqrt{x}) + c$$

$$\textcircled{6} \int e^x \cos e^x dx = \operatorname{sen} e^x + c$$

Resolución

$$\textcircled{7} \int \frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\cos x} dx = \ln \sec x + x + c$$

$$\textcircled{8} \int e^{3 \cos 2x} \operatorname{sen} 2x dx = -\frac{1}{6} e^{3 \cos 2x} + c$$

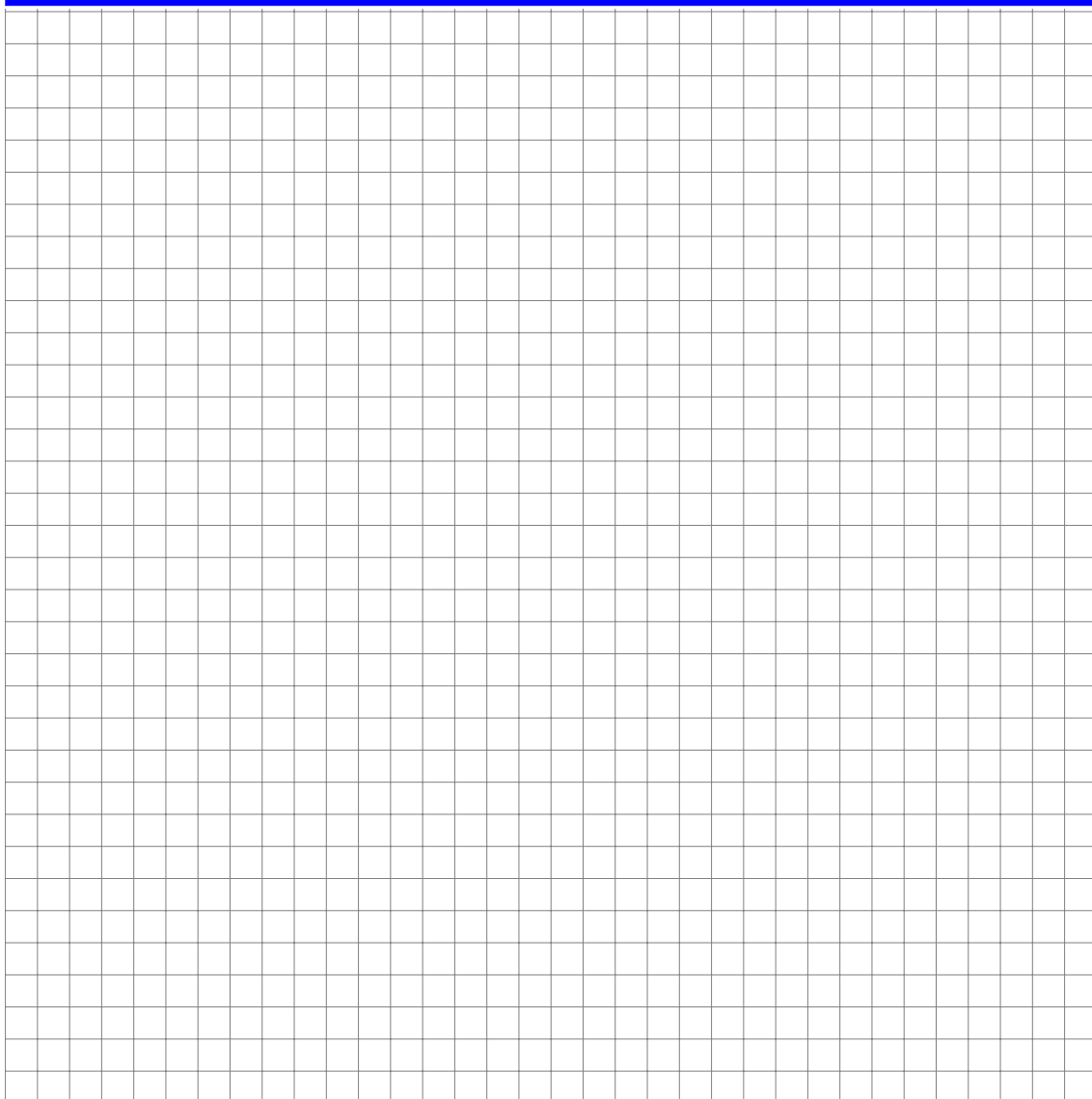
$$\textcircled{9} \int \frac{\sec x \tan x}{2 + 3 \sec x} dx = \frac{1}{3} \ln(2 + 3 \sec x) + c$$

$$\textcircled{10} \int \frac{dx}{1 + \cos x} = \csc x - \cot x + c$$

$$\textcircled{11} \int \frac{dx}{1 + \operatorname{sen} x} = \tan x - \sec x + c$$

$$\textcircled{12} \int (\sec x - \tan x)^2 dx = 2(\tan x - \sec x) - x + c$$

Resolución



$$\textcircled{13} \int \frac{\sec^2 x}{1 + \tan x} dx = \ln(1 + \tan x) + c$$

$$14 \int \frac{\cot x}{\cot^2 x - 1} dx = \frac{1}{2} \ln |\sec 2x| + c$$

$$15 \int \sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}} dx = \ln |1 + \sin x| + c$$

$$16 \int \frac{1 + \cos x}{x + \sin x} dx = \ln |x + \sin x| + c$$

$$17 \int \frac{\cos 2x}{\sin^3 2x} dx = -\frac{1}{4 \sin^2 2x} + c$$

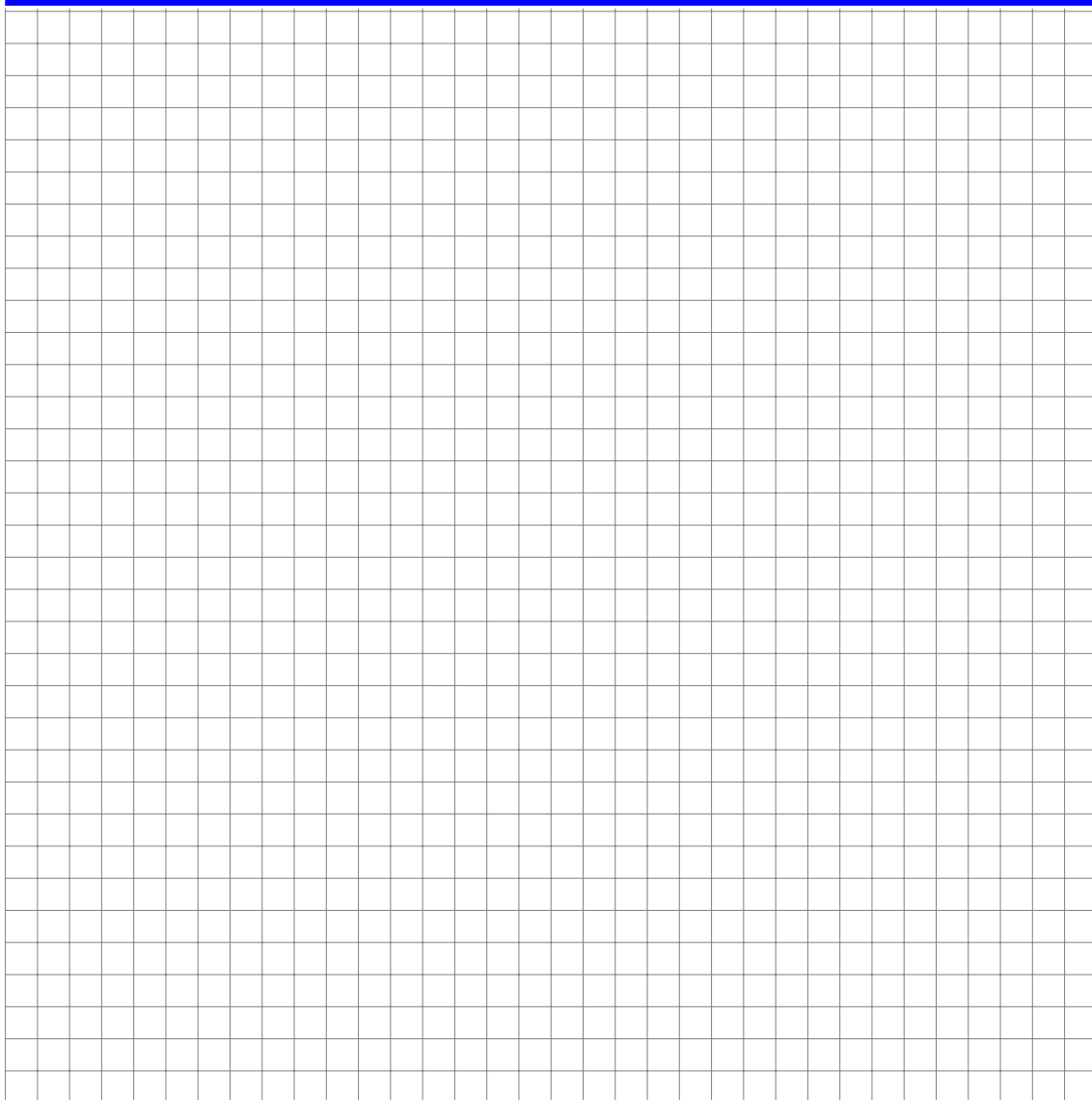
Resolución

$$18 \int \sin 2x \cos 4x dx = \frac{1}{4} \cos 2x - \frac{1}{12} \cos 6x + c$$

$$19 \int \frac{\sqrt{5 + 2 \tan x}}{\cos^2 x} dx = \frac{1}{3} (5 + 2 \tan x)^{3/2} + c$$

20 $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x \cos x} = -\frac{1}{\operatorname{sen} x} + \ln |\sec x + \tan x| + c$

Resolución



1.6. Cuarta fórmulas Básicas de Integración

1. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + c$
2. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsen \frac{x}{a} + c$
3. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{arcsec} \frac{x}{a} + c$
4. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x - a}{x + a} \right| + c$
5. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a + x}{a - x} \right| + c$
6. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a^2} \right| + c$

Ejercicios Resueltos

1 $I = \int \frac{4dx}{\sqrt{6 - x^2}}$

Resolución

$$I = 4 \int \frac{dx}{\sqrt{(\sqrt{6})^2 - x^2}}$$
$$I = 4 \arcsen \left(\frac{x}{\sqrt{6}} \right) + c$$

2 $\int \frac{dx}{x^2 - 4x + 13}$

Resolución

Cuando en el denominador se tiene una expresión cuadrática como en este caso, se completa cuadrados.

$$x^2 - 4x + 13 = (x - 2)^2 + 9$$

Luego se tiene que:

$$\int \frac{dx}{x^2 - 4x + 13} = \int \frac{dx}{(x - 2)^2 + 3^2}$$

Haciendo cambio de variable: $u = x - 2 \rightarrow du = dx$, entonces:

$$\int \frac{dx}{(x - 2)^2 + 3^2} = \int \frac{du}{u^2 + 3^2} = \frac{1}{3} \arctan \left(\frac{u}{3} \right) = \frac{1}{3} \arctan \left(\frac{x - 2}{3} \right) + c$$

$$3 \int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 - 6x - 6}}$$

Resolución

En el radicando, completamos cuadrados:

$$-x^2 - 6x - 6 = 3 - (x + 3)^2$$

Luego, reemplazando en la integral:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 - 6x - 6}} = \int \frac{dx}{\sqrt{3 - (x + 3)^2}}$$

Haciendo cambio de variable: $u = x + 3 \rightarrow du = dx$, entonces:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3 - (x + 3)^2}} = \int \frac{du}{\sqrt{3 - u^2}} = \arcsen\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right) = \arcsen\left(\frac{x + 3}{\sqrt{3}}\right) + c$$

$$4 \int \frac{dx}{x\sqrt{1 - \ln^2 x}}$$

Resolución

Hacemos:

$$I = \int \frac{dx}{x\sqrt{1 - \ln^2 x}} = \int \frac{\frac{dx}{x}}{\sqrt{1 - \ln^2 x}}$$

Sea $u = \ln x \rightarrow du = \frac{dx}{x}$, luego reemplazando:

$$I = \int \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = \arcsen(u) = \arcsen(\ln x) + c$$

$$5 \int \frac{1}{(x + 1)\sqrt{x}} dx$$

Resolución

Sea:

- $u = x^{1/2} \implies u^2 = x$
- $\implies 2udu = dx$

Entonces:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{(x+1) \cdot x^{1/2}} = \int \frac{2udu}{(u^2+1)u} \\ &= 2 \int \frac{du}{u^2+1} \\ &= 2 \arctan u + c \\ &= 2 \arctan \sqrt{x} + c \end{aligned}$$

6 $I = \int \frac{x^2 dx}{1+x^2}$

Resolución

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x^2 dx}{1+x^2} \\ &= \int \frac{x^2+1-1}{1+x^2} dx \\ &= \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx \\ &= \int dx - \int \frac{dx}{1+x^2} \\ &= x - \arctan x + C \end{aligned}$$

7 $I = \int \frac{dx}{\sqrt{2-5x^2}}$

Resolución

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{2-5x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(\sqrt{2})^2 - (\sqrt{5}x)^2}}$$

Sea:

$$\bullet \quad u = \sqrt{5}x \implies du = \sqrt{5}dx$$

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{du}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{(\sqrt{2})^2 - u^2}} \\
&= \frac{\sqrt{5}}{5} \int \frac{du}{\sqrt{(\sqrt{2})^2 - u^2}} \\
&= \frac{\sqrt{5}}{5} \operatorname{arc\,sen} \left(\frac{u}{\sqrt{2}} \right) + C \\
&= \frac{\sqrt{5}}{5} \operatorname{arc\,sen} \left(\frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{2}x}{2} \right) + C \\
&= \frac{\sqrt{5}}{5} \operatorname{arc\,sen} \left(\frac{\sqrt{10}x}{2} \right) + C
\end{aligned}$$

8 $I = \int \frac{xdx}{\sqrt{16 - 9x^4}}$

Resolución

$$I = \int \frac{xdx}{\sqrt{16 - 9x^4}} = \int \frac{xdx}{\sqrt{4^2 - (3x^2)^2}}$$

Sea:

$\bullet \quad u = 3x^2 \implies \frac{du}{6} = xdx$

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{du}{6} \cdot \frac{1}{\sqrt{4^2 - u^2}} = \frac{1}{6} \int \frac{du}{\sqrt{4^2 - u^2}} \\
&= \frac{1}{6} \operatorname{arc\,sen} \left(\frac{u}{4} \right) + C \\
&= \frac{1}{6} \operatorname{arc\,sen} \left(\frac{3x^2}{4} \right) + C
\end{aligned}$$

9 $I = \int \frac{dx}{x\sqrt{4 - 9\ln^2 x}}$

Resolución

$$I = \int \frac{dx}{x\sqrt{4 - (3\ln x)^2}}$$

Sea:

$\bullet \quad u = 3\ln x \implies \frac{du}{3} = \frac{1}{x}dx$

Entonces:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{3} \int \frac{du}{\sqrt{2^2 - u^2}} \\ &= \frac{1}{3} \arcsen\left(\frac{u}{2}\right) + C \\ &= \frac{1}{3} \arcsen\left(\frac{3 \ln x}{2}\right) + C \\ &= \frac{1}{3} \arcsen(\ln x^{3/2}) + C \end{aligned}$$

10 $I = \int \frac{dx}{e^{-x} + e^x}$

Resolución

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{\frac{1}{e^x} + e^x} = \int \frac{e^x dx}{1 + e^{2x}} \\ &= \int \frac{e^x dx}{1 + (e^x)^2} \end{aligned}$$

Sea:

$$\bullet \quad u = e^x \implies du = e^x dx$$

Entonces:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{du}{1 + u^2} = \arctan u + C \\ &= \arctan(e^x) + C \end{aligned}$$

11 $I = \int \frac{\sen x \cdot \cos x}{\sqrt{2 - \sen^4 x}} dx$

Resolución

Sea:

$$\begin{aligned} \bullet \quad u &= \sen^2 x \implies du = 2 \sen x \cdot \cos x dx \\ &\implies \frac{du}{2} = \sen x \cdot \cos x dx \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{2} \left(\frac{du}{\sqrt{2-u^2}} \right) = \frac{1}{2} \int \frac{du}{\sqrt{2-u^2}} \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{du}{\sqrt{(\sqrt{2})^2 - u^2}} \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{arc\,sen} \left(\frac{u}{\sqrt{2}} \right) + C \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{arc\,sen} \left(\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\sqrt{2}} \right) + C \end{aligned}$$

12 $I = \int \frac{\ln x}{x\sqrt{1+4\ln x - \ln^2 x}} dx$

Resolución

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\ln x}{x\sqrt{1+4-4+4\ln x - \ln^2 x}} dx \\ &= \int \frac{\ln x}{x\sqrt{5 - (\ln^2 x - 4\ln x + 4)}} dx \\ &= \int \frac{\ln x}{x\sqrt{5 - (\ln x - 2)^2}} dx \end{aligned}$$

Sea:

$$\begin{aligned} \bullet \quad u &= \ln x - 2 \implies \ln x = u + 2 \\ &\implies \frac{1}{x} dx = du \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{u+2}{\sqrt{5-u^2}} du \\ &= \int \frac{u}{\sqrt{5-u^2}} du + 2 \int \frac{du}{\sqrt{5-u^2}} \end{aligned}$$

Sea:

$$\begin{aligned} \bullet \quad v = \sqrt{5 - u^2} &\implies v^2 = 5 - u^2 \\ &\implies 2v dv = -2u du \\ &\implies -v dv = u du \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} I &= -\int \frac{v dv}{v} + 2 \operatorname{arc} \operatorname{sen}\left(\frac{u}{\sqrt{5}}\right) + C \\ &= -\int dv + 2 \operatorname{arc} \operatorname{sen}\left(\frac{u}{\sqrt{5}}\right) + C \\ &= -v + 2 \operatorname{arc} \operatorname{sen}\left(\frac{u}{\sqrt{5}}\right) + C \\ &= -\sqrt{5 - u^2} + 2 \operatorname{arc} \operatorname{sen}\left(\frac{u}{\sqrt{5}}\right) + C \\ &= -\sqrt{5 - (\ln x - 2)^2} + 2 \operatorname{arc} \operatorname{sen}\left(\frac{\ln x - 2}{\sqrt{5}}\right) + C \end{aligned}$$

$$13 \quad I = \int \frac{dx}{x\sqrt{2x+1}}$$

Resolución

Sea:

$$\begin{aligned} \bullet \quad u = \sqrt{2x+1} &\implies u^2 = 2x+1 \implies x = \frac{u^2-1}{2} \\ &\implies u du = dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I &= 2 \int \frac{du}{u^2-1} = \frac{2}{2} \ln \left| \frac{u-1}{u+1} \right| + C \\ &= \ln \left| \frac{\sqrt{2x+1}-1}{\sqrt{2x+1}+1} \right| + C \end{aligned}$$

$$14 \quad I = \int \frac{\sqrt{e^x-1} \cdot e^{\arctan x} + \ln(1+x^2)^{\sqrt{x^2 e^x - x^2}} + \sqrt{e^x-1}}{\sqrt{e^x + x^2 e^x - x^2 - 1} \cdot \sqrt{1+x^2}} dx$$

Resolución

$$\begin{aligned}
 &= \int \frac{\sqrt{e^x - 1} \cdot e^{\arctan x} + x\sqrt{e^x - 1} \ln(1 + x^2) + \sqrt{e^x - 1}}{\sqrt{e^x(1 + x^2) - (1 + x^2)} \cdot \sqrt{1 + x^2}} \cdot dx \\
 &= \int \frac{\sqrt{e^x - 1} \cdot e^{\arctan x} + x\sqrt{e^x - 1} \ln(1 + x^2) + \sqrt{e^x - 1}}{\sqrt{(e^x - 1)(1 + x^2)} \cdot \sqrt{1 + x^2}} \cdot dx \\
 &= \int \frac{\sqrt{e^x - 1} (e^{\arctan x} + x \ln(1 + x^2) + 1)}{\sqrt{(e^x - 1)} \cdot (1 + x^2)} \cdot dx \\
 &= \int \frac{e^{\arctan x} + x \ln(1 + x^2) + 1}{1 + x^2} \cdot dx \\
 &= \int \frac{e^{\arctan x}}{1 + x^2} \cdot dx + \int \frac{x \ln(1 + x^2)}{1 + x^2} dx + \int \frac{dx}{1 + x^2}
 \end{aligned}$$

Sea:

$$\boxed{\bullet \quad u = \ln(1 + x^2) \implies du = \frac{2x}{1 + x^2} dx}$$

$$\implies \frac{du}{2} = \frac{xdx}{1 + x^2}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
 I &= \int \frac{e^{\arctan x}}{1 + x^2} \cdot dx + \int u \frac{du}{2} + \int \frac{dx}{1 + x^2} \\
 &= e^{\arctan x} + \frac{1}{4} u^2 + \arctan(x) + C \\
 &= e^{\arctan x} + \frac{1}{4} \ln^2(1 + x^2) + \arctan(x) + C
 \end{aligned}$$

15 $I = \int \frac{\sec x \cdot \tan x}{\sqrt{\sec^2 x + 1}} dx$

Resolución

Sea: $\boxed{\bullet \quad u = \sec x \implies du = -\sec x \cdot \tan x dx}$

Entonces:

$$\begin{aligned}
 I &= \int \frac{-du}{\sqrt{u^2 + 1}} \\
 &= -\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + 1}} \\
 &= -\ln |u + \sqrt{u^2 + 1}| + C \\
 &= -\ln |\sec x + \sqrt{\sec^2 x + 1}| + C
 \end{aligned}$$

16 $I = \int \frac{e^{\arctan x} + x \ln(1 + x^2) + 1}{1 + x^2} \cdot dx$

Resolución

$$I = \int \frac{e^{\arctan x}}{1 + x^2} dx + \int \frac{x \ln(1 + x^2)}{1 + x^2} dx + \int \frac{dx}{1 + x^2}$$

Por partes, sea:

<ul style="list-style-type: none">• $u = \arctan x \implies du = \frac{dx}{1 + x^2}$• $v = \ln(1 + x^2) \implies dv = \frac{2x dx}{1 + x^2}$

$$\begin{aligned} I &= \int e^u du + \int \frac{v}{2} dv + \arctan x + C \\ &= e^u + \frac{1}{4} v^2 + \arctan x + C \\ &= e^{\arctan x} + \frac{1}{4} (\ln(1 + x^2))^2 + \arctan x + C \\ &= e^{\arctan x} + \frac{1}{4} \ln^2(1 + x^2) + \arctan x + C \end{aligned}$$

17 $I = \int \frac{dx}{x\sqrt{1 + x^2}}$

Resolución

Sea:

<ul style="list-style-type: none">• $u = \frac{1}{x} \implies x = \frac{1}{u} \implies dx = -\frac{du}{u^2}$

Entonces:

$$\begin{aligned} I &= \int u \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{u^2}}} \cdot \frac{-du}{u^2} = - \int \frac{udu}{u\sqrt{u^2 + 1}} \\ &= - \int \frac{du}{\sqrt{u^2 + 1}} \\ &= - \ln | u + \sqrt{u^2 + 1} | + C \\ &= - \ln \left| \frac{1}{x} + \sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2 + 1} \right| + C \\ &= - \ln \left| \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \sqrt{1 + x^2} \right| + C \\ &= \ln \left(\left| \frac{1 + \sqrt{1 + x^2}}{x} \right| \right)^{-1} + C \\ &= \ln \left| \frac{x}{1 + \sqrt{1 + x^2}} \right| + C \end{aligned}$$

18 $I = \int \frac{\cos 2x}{4 + \cos^2 2x} dx$

Resolución

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\cos 2x}{4 + 1 - \operatorname{sen}^2 2x} dx \\ &= \int \frac{\cos 2x}{5 - \operatorname{sen}^2 2x} dx \end{aligned}$$

Sea : $\left[\bullet u = \operatorname{sen} 2x \implies du = 2 \cos 2x dx \right]$

Entonces:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int \frac{du}{5 - u^2} \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{du}{(\sqrt{u})^2 - u^2} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2\sqrt{5}} \ln \left| \frac{\sqrt{5} + u}{\sqrt{5} - u} \right| \right) + C \\ &= \frac{1}{4\sqrt{5}} \ln \left| \frac{\sqrt{5} + \operatorname{sen} 2x}{\sqrt{5} - \operatorname{sen} 2x} \right| + C \end{aligned}$$

19 $I = \int \frac{2x + 5}{x^2 + 2x + 5} dx$

Resolución

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{2x + 2 + 3}{x^2 + 2x + 5} dx \\ &= \int \frac{2x + 2}{x^2 + 2x + 5} dx + 3 \int \frac{dx}{(x^2 + 2x + 1) + 4} \\ &= \int \frac{2x + 2}{x^2 + 2x + 5} dx + 3 \int \frac{dx}{(x + 1)^2 + 2^2} \end{aligned}$$

Sea:

$$\bullet \quad u = x^2 + 2x + 5 \implies du = (2x + 2)dx$$

Entonces:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{du}{u} + 3 \int \frac{dx}{(x + 1)^2 + 2^2} \\ &= \ln |u| + \frac{2}{3} \arctan \left(\frac{x + 1}{2} \right) + C \\ &= \ln |x^2 + 2x + 5| + \frac{2}{3} \arctan \left(\frac{x + 1}{2} \right) + C \\ &= \ln |x^2 + 2x + 5| + \frac{2}{3} \arctan \left(\frac{x + 1}{2} \right) + C \end{aligned}$$

20 $I = \int \frac{18dx}{x^2 + 4x - 5}$

Resolución

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{18dx}{(x^2 + 4x + 4) - 4 - 5} = \int \frac{18dx}{(x + 2)^2 - 9} \\ &= 18 \int \frac{dx}{(x + 2)^2 - 9} \end{aligned}$$

Sea:

$$\bullet \quad u = x + 2 \implies du = dx$$

Entonces:

$$\begin{aligned} I &= 18 \int \frac{du}{u^2 - 3^2} = 18 \left(\frac{1}{6} \right) \ln \left| \frac{u-3}{u+3} \right| + C \\ &= 3 \ln \left| \frac{x+2-3}{x+2+3} \right| + C \\ &= \ln \left| \frac{x-1}{x+5} \right|^3 + C \end{aligned}$$

Ejercicios Propuestos

Verificar las siguientes igualdades:

$$\textcircled{1} \int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \arcsen \frac{x}{2} + c$$

$$\textcircled{3} \int \frac{dx}{\sqrt{2-5x^2}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \arcsen \left(\frac{\sqrt{10}}{2}x \right) + c$$

$$\textcircled{2} \int \frac{dx}{9+x^2} = \frac{1}{3} \arctan \frac{x}{3} + c$$

$$\textcircled{4} \int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2-9}} = \frac{1}{3} \operatorname{arcsec} \left(\frac{2x}{3} \right) + c$$

$$\textcircled{5} \int \frac{xdx}{\sqrt{16-9x^4}} = \frac{1}{6} \arcsen \left(\frac{3}{4}x^2 \right) + c$$

Resolución

$$\textcircled{6} \int \frac{x^2 dx}{1+x^2} = x - \arctan x + c$$

$$\textcircled{7} \int \frac{3x^3 - 4x^2 + 3x}{x^2 + 1} dx = \frac{3}{2}x^2 - 4x + 4 \arctan x + c$$

$$\textcircled{8} \int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \arctan e^x + c$$

$$\textcircled{9} \int \frac{\sec x \tan x}{9 + 4 \sec^2 x} dx = \frac{1}{6} \arctan \frac{2 \sec x}{3} + c$$

$$\textcircled{10} \int \frac{e^x dx}{e^{2x} + e^x - 3} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{e^x + 1}{\sqrt{2}} + c$$

Resolución



$$\textcircled{11} \int \frac{2x - 7}{x^2 + 9} dx = \ln(x^2 + 9) - \frac{7}{3} \arctan \frac{x}{3} + c$$

$$\textcircled{12} \int \frac{dx}{\sqrt{8 - 4x - x^2}} = \arcsen \frac{x + 2}{\sqrt{12}} + c$$

$$13 \int \frac{dx}{x^2 - x + 2} = \frac{2}{\sqrt{7}} \arctan\left(\frac{2x - 1}{\sqrt{7}}\right) + c$$

$$14 \int \frac{x dx}{\sqrt{1 - 3x^2 - 2x^4}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \arcsen\left(\frac{4x^2 + 3}{\sqrt{17}}\right) + c$$

$$15 \int \frac{2x - 3}{x^2 + 6x + 13} dx = \ln|x^2 + 6x + 13| - \frac{9}{2} \arctan\left(\frac{x + 3}{2}\right) + c$$

Resolución

$$16 \int \frac{2 + x}{\sqrt{4 - 2x - x^2}} dx = \arcsen\left(\frac{1 + x}{\sqrt{5}}\right) - \sqrt{4 - 2x - x^2} + c$$

$$17 \int \frac{5 - 4x}{\sqrt{12x - 4x^2 - 8}} dx = \sqrt{12x - 4x^2 - 8} - \frac{1}{2} \arcsen(2x - 3) + c$$

$$18 \int \frac{2x + 5}{x^2 + 2x + 5} dx = \ln|x^2 + 2x + 5| + \frac{3}{2} \arctan\left(\frac{x + 1}{2}\right) + c$$

19 $\int \frac{x+2}{\sqrt{4x-x^2}} dx = -\sqrt{4x-x^2} + 4 \arcsin\left(\frac{x-2}{2}\right) + c$

20 $\int \frac{x^3 dx}{x^4+x^2+1} = \frac{1}{4} \ln(x^4+x^2+1) - \frac{\sqrt{3}}{6} \arctan\left(\frac{2x^2+1}{\sqrt{3}}\right) + c$

Resolución

A large grid of graph paper for working out the solution.

Capítulo 2

Integración de funciones trigonométricas

Cuando nos referimos a la integración de funciones trigonométricas, estamos hablando de calcular integrales cuyo integrando está compuesto por funciones trigonométricas y constantes. A continuación, se presentan los diferentes casos que pueden surgir.

Integrales de la forma: $\int \operatorname{sen}^n x dx$ ó $\int \operatorname{cos}^n x dx$

Se presentan los siguientes criterios para n entero positivo:

- ♠ $\operatorname{sen}^n x = \operatorname{sen}^{2k+1} x = (\operatorname{sen}^2 x)^k \operatorname{sen} x = (1 - \operatorname{cos}^2 x)^k \operatorname{sen} x$ (n impar)
- ♠ $\operatorname{sen}^n x = \operatorname{sen}^{2k} x = (\operatorname{sen}^2 x)^k = \left(\frac{1 - \operatorname{cos} 2x}{2}\right)^k$ (n par)
- ♠ $\operatorname{cos}^n x = \operatorname{cos}^{2k+1} x = (\operatorname{cos}^2 x)^k \operatorname{cos} x = (1 - \operatorname{sen}^2 x)^k \operatorname{cos} x$ (n impar)
- ♠ $\operatorname{cos}^n x = \operatorname{cos}^{2k} x = (\operatorname{cos}^2 x)^k = \left(\frac{1 + \operatorname{cos} 2x}{2}\right)^k$ (n par)

Ejercicios Resueltos

Resolver las siguientes integrales indefinidas

1 Calcular $\int \operatorname{cos}^3 x dx$

Resolución

$$\begin{aligned}
\int \cos^3 x dx &= \int \cos^2 x \cos x dx \\
&= \int (1 - \operatorname{sen}^2 x) \cos x dx \\
&= \int (\cos x - \operatorname{sen}^2 x \cos x) dx \\
&= \operatorname{sen} x - \frac{\operatorname{sen}^2 x}{2} + c
\end{aligned}$$

2 Calcular $\int \operatorname{sen}^5 x dx$

Resolución

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^5 x dx &= \int \operatorname{sen}^4 x \operatorname{sen} x dx = \int (1 - \cos^2 x)^2 \operatorname{sen} x dx \\
&= \int (\operatorname{sen} x - 2 \cos^2 x \operatorname{sen} x + \cos^4 x \operatorname{sen} x) dx \\
&= -\cos x + \frac{2}{3} \cos^3 x - \frac{1}{5} \cos^5 x + c
\end{aligned}$$

3 Calcular $\int \operatorname{sen}^2 x dx$

Resolución

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^2 x dx &= \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx \\
&= \frac{1}{2} \int (1 - \cos 2x) dx \\
&= \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + c
\end{aligned}$$

4 Calcular $\int \cos^4 x dx$

Resolución

$$\begin{aligned}
\int \cos^4 x dx &= \int \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^2 dx = \frac{1}{4} \int (1 + 2 \cos 2x + \cos^2 2x) dx \\
&= \frac{1}{4} \int \left(1 + 2 \cos 2x + \frac{1 + \cos 4x}{2} \right) dx \\
&= \frac{3}{8} x + \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{32} \operatorname{sen} 4x + c
\end{aligned}$$

Integrales de la forma: $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x dx$, con m ó n impar positivo

La solución se encuentra siguiendo el procedimiento expuesto en la sección 2.1. considerando aquel exponente que es impar.

Ejercicios Resueltos

1 Calcular $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^3 x dx$

Resolución

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^2 x \cos^3 x dx &= \int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x \cos x dx \\ &= \int \operatorname{sen}^2 x (1 - \operatorname{sen}^2 x) \cos x dx \\ &= \int (\operatorname{sen}^2 x \cos x - \operatorname{sen}^4 x \cos x) dx \\ &= \frac{1}{3} \operatorname{sen}^3 x - \frac{1}{5} \operatorname{sen}^5 x + c\end{aligned}$$

2 Calcular $\int \operatorname{sen}^3 x \cos^2 x dx$

Resolución

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^3 x \cos^2 x dx &= \int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x \operatorname{sen} x dx \\ &= \int (1 - \cos^2 x) \cos^2 x \operatorname{sen} x dx \\ &= \int (\cos^2 x - \cos^4 x) \operatorname{sen} x dx \\ &= \int (\cos^2 x \operatorname{sen} x - \cos^4 x \operatorname{sen} x) dx \\ &= -\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^5 x}{5} + c\end{aligned}$$

2.1. Integrales de la forma: $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x dx$, con m y n pares positivo

En este caso, la integral se evalúa en forma similar al procedimiento que se emplea en el sección 2.1.

Ejercicios Resueltos

1 $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x dx$

Resolución

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x dx &= \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right) \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right) dx \\
&= \frac{1}{4} \int (1 - \cos^2 2x) dx \\
&= \frac{1}{4} \int dx - \frac{1}{4} \int \cos^2 2x dx \\
&= \frac{1}{4} x - \frac{1}{4} \int \left(\frac{1 + \cos 4x}{2} \right) dx \\
&= \frac{1}{4} x - \frac{1}{8} x - \frac{1}{8} \int \cos 4x dx \\
&= \frac{1}{8} x - \frac{1}{32} \operatorname{sen} 4x + c
\end{aligned}$$

2 $\int \operatorname{sen}^4 x \cos^2 x dx$

Resolución

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^4 x \cos^2 x dx &= \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 dx = \int \operatorname{sen}^2 x (1 - \operatorname{sen}^2 x) \cos x dx \\
&= \frac{1}{8} \int (1 - 2 \cos 2x + \cos^2 2x)(1 + \cos 2x) dx \\
&= \frac{1}{8} \int (1 - \cos 2x - \cos^2 2x + \cos^3 2x) dx \\
&= \frac{1}{8} \int (1 - \cos 2x - \cos^2 2x + \cos^3 2x) dx \\
&= \frac{1}{8} \int \left(1 - \cos 2x - \frac{1 + \cos 4x}{2} + (1 - \operatorname{sen}^2 2x) \cos 2x \right) dx \\
&= \frac{1}{16} \int (1 - \cos 4x - 2 \operatorname{sen}^2 2x \cos 2x) dx \\
&= \frac{1}{16} \left(x - \frac{1}{4} \operatorname{sen} 4x - \frac{1}{3} \operatorname{sen}^3 2x \right) + c
\end{aligned}$$

3 $I = \int \frac{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 3x + \dots + \operatorname{sen} nx}{\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \dots + \cos nx} dx$

Solución

Sea:

- $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 3x + \dots + \operatorname{sen} nx =$

$$= \frac{\operatorname{sen} \frac{n+1}{2} x \cdot \operatorname{sen} \frac{nx}{2}}{\operatorname{sen} \frac{x}{2}}$$
- $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \dots + \cos nx =$

$$= \frac{\cos \frac{n+1}{2} x \cdot \operatorname{sen} \frac{nx}{2}}{\operatorname{sen} \frac{x}{2}}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} I &= \int \left(\frac{\frac{\operatorname{sen} \frac{n+1}{2} x \cdot \operatorname{sen} \frac{nx}{2}}{\operatorname{sen} \frac{x}{2}}}{\frac{\operatorname{cos} \frac{n+1}{2} x \cdot \operatorname{sen} \frac{nx}{2}}{\operatorname{sen} \frac{x}{2}}} \right) dx \\ &= \int \tan \left(\frac{n+1}{2} x \right) dx \\ &= -\frac{2}{n+1} \ln \left| \cos \frac{n+1}{2} x \right| + C \end{aligned}$$

4 $I = \int \cos 3x \cdot \cos 7x dx$

Solución

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{2} (\cos 4x + \cos 10x) dx \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\operatorname{sen} 4x}{4} + \frac{\operatorname{sen} 10x}{10} \right) + C \\ &= \frac{\operatorname{sen} 4x}{8} + \frac{\operatorname{sen} 10x}{20} + C \end{aligned}$$

5 $I = \int \operatorname{sen}(2x + 4) \cdot \cos(6x + 12) dx$

Solución

Sea: $u = 2x + 4$

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int \operatorname{sen} u \cdot \cos 3u du \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{2} (\operatorname{sen} 4u + \operatorname{sen}(-2u)) du \\ &= \frac{1}{4} \int (\operatorname{sen} 4u - \operatorname{sen}(2u)) du \\ &= \frac{1}{4} \left(-\frac{\operatorname{cos} 4u}{4} - \frac{\operatorname{cos} 2u}{2} \right) + C \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{\operatorname{cos}(4x + 8)}{4} - \frac{\operatorname{cos}(8x + 16)}{2} \right) + C \end{aligned}$$

6 $I = \int \cos^5 3x \cdot \operatorname{sen}^3 3x \, dx$

Solución

$$\begin{aligned} I &= \int \cos^5 3x \cdot \operatorname{sen}^2 3x \cdot \operatorname{sen} 3x \, dx \\ &= \int \cos^5 3x (1 - \cos^2 3x) \operatorname{sen} 3x \, dx \\ &= \int \cos^5 3x \operatorname{sen} 3x \, dx - \int \cos^7 3x \operatorname{sen} 3x \, dx \\ &= -\frac{\cos^6 3x}{18} + \frac{\cos^8 3x}{24} + C \\ &= \frac{\cos^8 3x}{24} - \frac{\cos^6 3x}{18} + C \end{aligned}$$

7 $I = \int \operatorname{sen} 10x \cdot \cos 19x \, dx$

Solución

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{2} (\operatorname{sen} 29x + \operatorname{sen}(-9x)) \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int (\operatorname{sen} 29x - \operatorname{sen}(9x)) \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int \operatorname{sen} 29x \, dx - \frac{1}{2} \int \operatorname{sen} 9x \, dx \\ &= -\frac{\cos 29x}{58} + \frac{\cos 9x}{18} + C \\ &= \frac{\cos 9x}{18} - \frac{\cos 29x}{58} + C \end{aligned}$$

8 $I = \int \frac{\operatorname{sen} x \cdot e^{\tan^2 x}}{\cos^3 x} \, dx$

Solución

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\operatorname{sen} x \cdot e^{\tan^2 x}}{\cos x \cos^2 x} \, dx \\ &= \int \tan x \cdot \sec^2 x \cdot e^{\tan^2 x} \, dx \end{aligned}$$

Sea:

$$\begin{aligned} \bullet \quad u = \tan^2 x &\Rightarrow du = 2 \tan x \sec^2 x dx \\ &\Rightarrow \frac{du}{2} = \tan x \sec^2 x dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{e^u du}{2} \\ &= \frac{e^u}{2} + C \\ &= \frac{e^{\tan^2 x}}{2} + C \end{aligned}$$

$$\textcircled{9} \quad I = \int \operatorname{sech} x \, dx$$

Solución

Se sabe que: $\operatorname{sech} x = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{2}{e^x + e^{-x}} \, dx \\ &= \int \frac{2e^x}{e^{2x} + 1} \, dx \\ &= 2 \int \frac{e^x}{(e^x)^2 + 1} \, dx \end{aligned}$$

Sea:

$$\bullet \quad u = e^x \Rightarrow du = e^x dx$$

$$\begin{aligned} I &= 2 \int \frac{du}{u^2 + 1} \\ &= 2 \arctan u + C \\ &= 2 \arctan(e^x) + C \end{aligned}$$

$$\textcircled{10} \quad I = \int (\sin^2 3x + \cos 3x)^2 \, dx$$

Solución

$$\begin{aligned}
I &= \int (\operatorname{sen}^4 3x + 2 \operatorname{sen}^2 3x \cdot \cos 3x + \cos^2 3x) dx \\
&= \int \operatorname{sen}^4 3x dx + 2 \int \operatorname{sen}^2 3x \cdot \cos 3x dx + \int \cos^2 3x dx \\
&= \int \left(\frac{1 - \cos 6x}{2} \right)^2 dx + \frac{2}{9} \operatorname{sen}^3 3x + \int \left(\frac{1 + \cos 6x}{2} \right) dx \\
&= \frac{1}{4} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos 6x dx + \frac{1}{4} \int \cos^2 6x dx + \frac{2}{9} \operatorname{sen}^3 3x \\
&+ \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \cos 6x dx \\
&= \frac{3}{4} \int dx + \frac{1}{4} \int \left(\frac{1 + \cos 12x}{2} \right) dx + \frac{2}{9} \operatorname{sen}^3 3x \\
&= \frac{3x}{4} + \frac{1}{8} \int dx + \frac{1}{8} \int \cos 12x dx + \frac{2}{9} \operatorname{sen}^3 3x \\
&= \frac{3x}{4} + \frac{x}{8} + \frac{1}{8} \left(\frac{\operatorname{sen} 12x}{12} \right) + \frac{2}{9} \operatorname{sen}^3 3x + C \\
&= \frac{7x}{8} + \frac{\operatorname{sen} 12x}{96} + \frac{2}{9} \operatorname{sen}^3 3x + C
\end{aligned}$$

11 $I = \int \sqrt{\cos x} \cdot \operatorname{sen}^3 x dx$

Solución

$$\begin{aligned}
I &= \int \cos^{1/2} x \cdot \operatorname{sen}^2 x \cdot \operatorname{sen} x dx \\
&= \int \cos^{1/2} x (1 - \cos^2 x) \operatorname{sen} x dx \\
&= \int \cos^{1/2} \operatorname{sen} x dx - \int \cos^{5/2} x \operatorname{sen} x dx \\
&= -\frac{\cos^{3/2}}{3/2} + \frac{\cos^{7/2}}{7/2} + C \\
&= \frac{2 \cos^{7/2}}{7} - \frac{2 \cos^{3/2}}{3} + C
\end{aligned}$$

12 $I = \int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos^2 x \cdot \sqrt[3]{\cos x}} dx$

Solución

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos^2 x \cdot \cos^{1/3} x} dx \\
&= \int \frac{\operatorname{sen}^2 x \cdot \operatorname{sen} x}{\cos^{7/3} x} dx \\
&= \int \frac{(1 - \cos^2 x) \operatorname{sen} x}{\cos^{7/3} x} dx \\
&= \int (\cos^{-7/3} - \cos^{-1/3} x) \operatorname{sen} x dx \\
&= \frac{\cos^{-4/3}}{-4/3} - \frac{\cos^{2/3}}{2/3} + C \\
&= -\frac{3 \cos^{-4/3}}{4} - \frac{3 \cos^{2/3}}{2} + C
\end{aligned}$$

$$\textcircled{13} \quad I = \int \frac{\cos^5 x}{\sqrt{\operatorname{sen} x}} dx$$

Solución

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{\cos^4 x \cdot \cos x}{\operatorname{sen}^{1/2} x} dx \\
&= \int \frac{(1 - \operatorname{sen}^2 x)^2}{\operatorname{sen}^{1/2} x} \cos x dx \\
&= \int \frac{(1 - 2 \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^4 x)}{\operatorname{sen}^{1/2} x} \cos x dx \\
&= \int \operatorname{sen}^{-1/2} x \cos x dx - 2 \int \operatorname{sen}^{3/2} x \cos x dx \\
&\quad + \int \operatorname{sen}^{7/2} x \cos x dx \\
&= 2 \operatorname{sen}^{1/2} x - \frac{4}{5} \operatorname{sen}^{5/2} x + \frac{2}{9} \operatorname{sen}^{9/2} x + C
\end{aligned}$$

$$\textcircled{14} \quad I = \int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\sqrt[3]{\cos^4 x}} dx$$

Solución

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\operatorname{sen}^2 x \cdot \operatorname{sen} x}{\cos^{4/3} x} dx \\ &= \int \frac{(1 - \cos^2 x)}{\cos^{4/3} x} \operatorname{sen} x dx \\ &= \int \cos^{-4/3} x \operatorname{sen} x dx - \int \cos^{2/3} x \operatorname{sen} x dx \\ &= -\frac{\cos^{-1/3} x}{-1/3} + \frac{\cos^{5/3} x}{5/3} + C \\ &= 3 \cos^{-1/3} x + \frac{3}{5} \cos^{5/3} x + C \\ &= \sqrt[3]{\sec x} \left(\frac{3}{5} \cos^2 x + 3 \right) + C \end{aligned}$$

Ejercicios Propuestos

$$\textcircled{1} \int \cos^2 x dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x + c$$

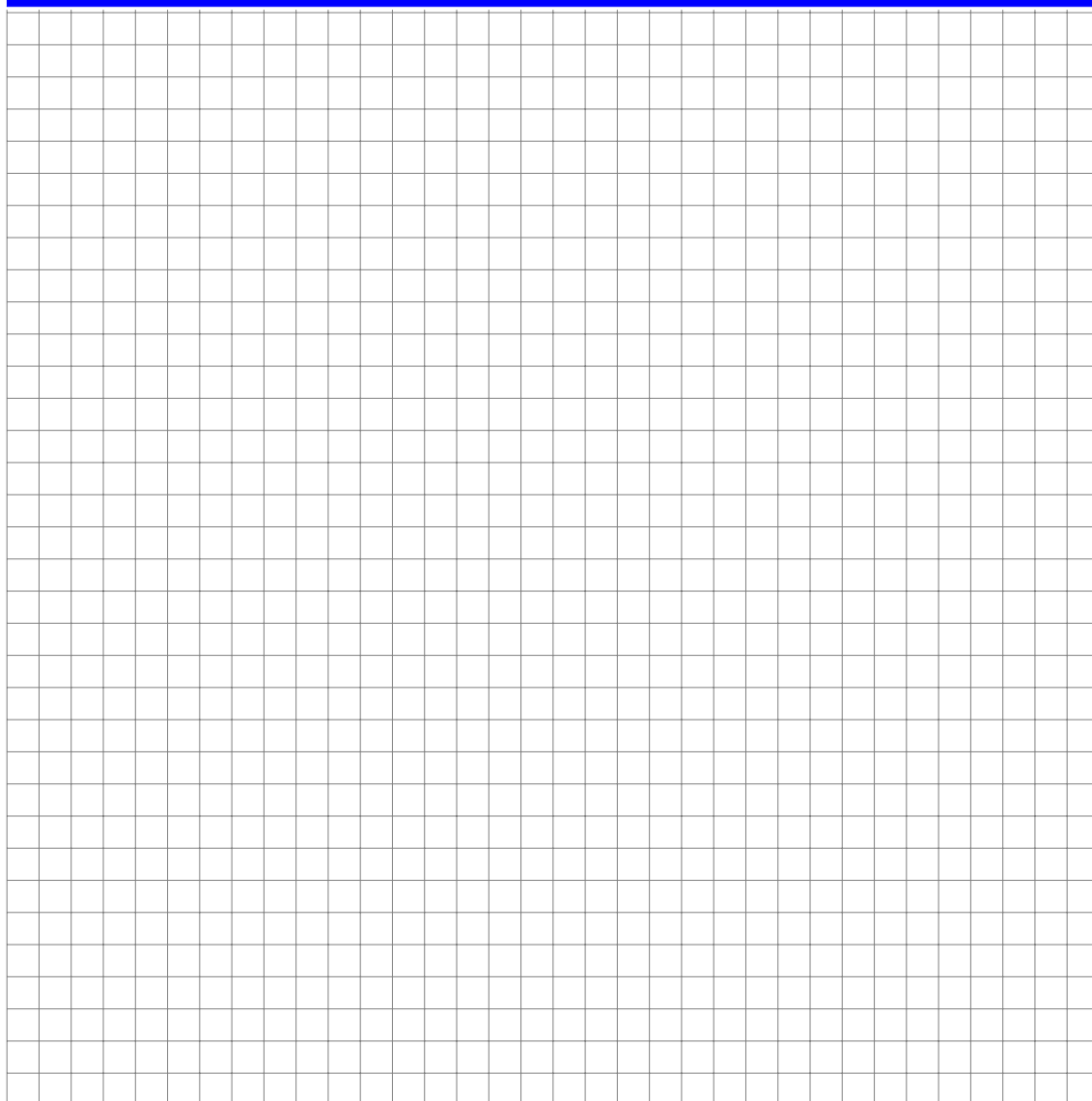
$$\textcircled{2} \int \sin^3 x dx = -\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x + c$$

$$\textcircled{3} \int \sin^4 x dx = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + c$$

$$\textcircled{4} \int \cos^5 x dx = \sin x - \frac{2}{3} \sin^3 x + \frac{1}{5} \sin^5 x + c$$

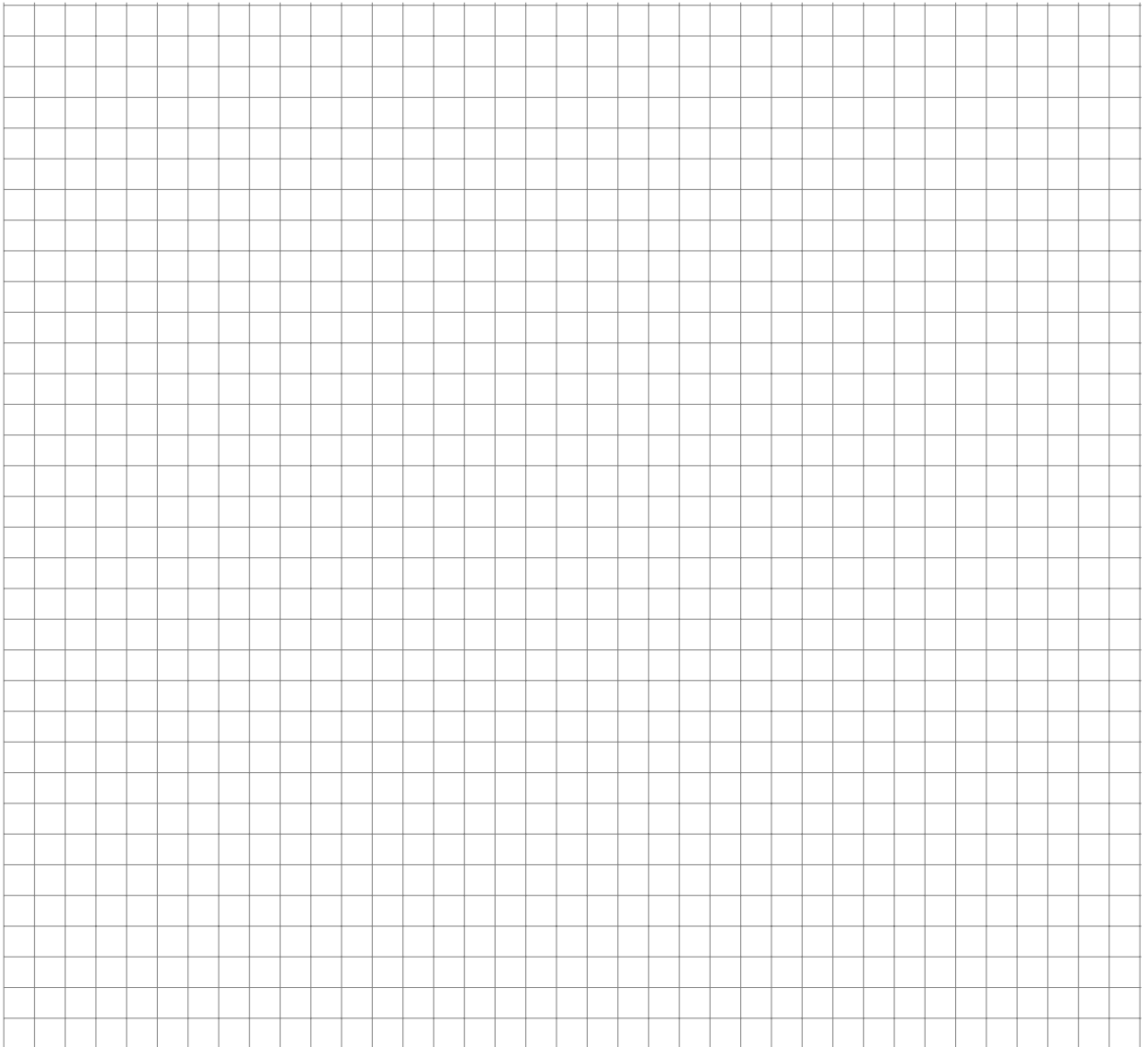
$$\textcircled{5} \int \sin^6 x dx = \frac{5}{16}x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{3}{64} \sin 4x + \frac{1}{48} \sin^3 2x + c$$

Resolución



12 $\int \cos^4 2x \operatorname{sen}^3 2x dx = -\frac{1}{10} \cos^5 2x + \frac{1}{14} \cos^7 2x + c$

Resolución



2.2. Integrales de la forma: $\int \tan^n x dx$ o $\int \cot^n x dx$, con n entero positivo

Puesto que n puede ser par o impar, su solución puede ser encontrada teniendo en cuenta lo siguiente:

$$\tan^n x = (\tan^{n-2} x)(\tan^2 x) = (\tan^{n-2} x)(\sec^2 x - 1)$$

$$\cot^n x = (\cot^{n-2} x)(\cot^2 x) = (\cot^{n-2} x)(\csc^2 x - 1)$$

Se tiene los siguientes ejemplos:

Ejercicios Resueltos

1 Calcular $\int \tan^4 x dx$

Resolución

$$\begin{aligned}\int \tan^4 x dx &= \int \tan^2 x \tan^2 x dx \\ &= \int \tan^2 x (\sec^2 x - 1) dx \\ &= \int (\tan^2 x \sec^2 x - \sec^2 x + 1) dx \\ &= \frac{\tan^3 x}{3} - \tan x + x + c\end{aligned}$$

2 Calcular $\int \cot^4 x dx$

Resolución

$$\begin{aligned}\int \cot^4 x dx &= \int \cot^2 x \cot^2 x dx \\ &= \int \cot^2 x (\csc^2 x - 1) dx \\ &= \int (\cot^2 x \csc^2 x - \cot^2 x) dx \\ &= \int (\cot^2 x \csc^2 x - \csc^2 x + 1) dx \\ &= -\frac{\cot^3 x}{3} + \cot x + x + c\end{aligned}$$

3 Calcular $\int \tan^3 x dx$

Resolución

$$\begin{aligned}
\int \tan^3 x dx &= \int \tan x \tan^2 x dx \\
&= \int \tan x (\sec^2 x - 1) dx \\
&= \int (\tan x \sec^2 x - \tan x) dx \\
&= \frac{\tan^2 x}{2} + \ln |\cos x| + c
\end{aligned}$$

2.3. Integrales de la forma: $\int \sec^n x dx$ o $\int \csc^n x dx$, con n entero par positivo.

Si n es un entero par positivo, entonces $n = 2k$, luego escribiremos:

$$\sec^n x = \sec^{2k} x = \sec^{2k-2} \sec^2 x = (1 + \tan^2 x)^{k-1} \sec^2 x$$

$$\csc^n x = \csc^{2k} x = \csc^{2k-2} \csc^2 x = (1 + \cot^2 x)^{k-1} \csc^2 x$$

Nota 1 Cuando n es un entero impar positivo, se usara el método de integración por partes, expuesto posteriormente.

Ejercicios Resueltos

1 Calcular $\int \sec^6 x dx$

Resolución

$$\begin{aligned}
\int \sec^6 x dx &= \int \sec^4 x \sec^2 x dx \\
&= \int (1 + \tan^2 x)^2 \sec^2 x dx \\
&= \int (\sec^2 x + 2 \tan^2 x \sec^2 x + \tan^4 x \sec^2 x) dx \\
&= \tan x + \frac{2}{3} \tan^3 x + \frac{1}{5} \tan^5 x + c
\end{aligned}$$

2 Calcular $\int \csc^4 x dx$

Resolución

$$\begin{aligned}
\int \csc^4 x dx &= \int \csc^2 x \csc^2 x dx \\
&= \int (1 + \cot^2 x) \csc^2 x dx \\
&= \int (\csc^2 x + \cot^2 x \csc^2 x) dx \\
&= -\cot x - \frac{\cot^3 x}{3} + c
\end{aligned}$$

2.4. Integrales de la forma:

$$\int \tan^m x \sec^n x dx \quad \text{o} \quad \int \cot^m x \csc^n x dx$$

Se tiene los siguientes casos:

***n* entero par positivo y *m* cualquiera**

$$\begin{aligned}
\tan^m x \sec^n x &= \tan^m x \sec^{2k} x \\
&= \tan^m x \sec^{2k-2} x \sec^2 x \\
&= \tan^m x (1 + \tan^2 x)^{k-1} \sec^2 x
\end{aligned}$$

***n* entero par positivo y *m* cualquiera**

$$\begin{aligned}
\cot^m x \csc^n x &= \cot^m x \csc^{2k} x \\
&= \cot^m x \csc^{2k-2} x \csc^2 x \\
&= \cot^m x (1 + \cot^2 x)^{k-1} \csc^2 x
\end{aligned}$$

***m* entero impar positivo y *n* cualquiera**

$$\begin{aligned}
\tan^m x \sec^n x &= (\tan^{2k+1} x) \sec^n x \\
&= \tan^{2k} x \sec^{n-1} x (\tan x \sec x) \\
&= (\sec^2 x - 1)^k (\sec^{n-1} x) (\tan x \sec x)
\end{aligned}$$

***m* entero impar positivo y *n* cualquiera**

$$\begin{aligned}
\cot^m x \csc^n x &= (\cot^{2k+1} x) \csc^n x \\
&= \cot^{2k} x \csc^{n-1} x (\cot x \csc x) \\
&= (\csc^2 x - 1)^k (\csc^{n-1} x) (\cot x \csc x)
\end{aligned}$$

Nota:

En el caso particular de que sea m par y n impar, la solución es determinada mediante el método de integración por partes.

Ejercicios Resueltos

1 $\int \tan^7 x \sec^4 x dx$

Resolución

$$\begin{aligned} \int \tan^7 x \sec^4 x dx &= \int \tan^7 x \sec^2 x \sec^2 x dx = \int \tan^7 x (1 + \tan^2 x) \sec^2 x dx \\ &= \int (\tan^7 x \sec^2 x + \tan^9 x \sec^2 x) dx \\ &= \frac{1}{8} \tan^8 x + \frac{1}{10} \tan^{10} x + c \end{aligned}$$

2 $\int \cot^3 x \csc^5 x dx$

Resolución

$$\begin{aligned} \int \cot^3 x \csc^5 x dx &= \int \cot^2 x \csc^4 x (\cot x \csc x) dx \\ &= \int (\csc^2 x - 1) \csc^4 x (\cot x \csc x) dx \\ &= \int [\csc^6 x (\cot x \csc x) - \csc^4 x (\cot x \csc x)] dx \\ &= -\frac{1}{7} \csc^7 x + \frac{1}{5} \csc^5 x + c \end{aligned}$$

3 $I = \int \tan^3 4x \cdot \sec^{9/2} 4x dx$

Solución

$$\begin{aligned} I &= \int \tan^2 4x \cdot \sec^{7/2} 4x \cdot \tan 4x \cdot \sec 4x dx \\ &= \int (\sec^2 4x - 1) \sec^{7/2} 4x \cdot \tan 4x \cdot \sec 4x dx \\ &= \int \sec^{11/2} 4x \cdot \tan 4x \cdot \sec 4x dx \\ &\quad - \int \sec^{7/2} 4x \cdot \tan 4x \cdot \sec 4x dx \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{\sec^{13/2} 4x}{13/2} \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{\sec^{9/2} 4x}{9/2} \right) + C \\ &= \frac{\sec^{13/2} 4x}{26} - \frac{\sec^{9/2} 4x}{18} + C \end{aligned}$$

$$4 \quad I = \int \frac{\sqrt{2} \cdot dx}{\cos^3 x \cdot \sqrt{\sin 2x}}$$

Solución

$$\begin{aligned}
 I &= \int \frac{\sqrt{2} \cdot dx}{\cos^3 x \cdot \sqrt{2 \sin x \cos x}} \\
 &= \int \frac{\sqrt{2} \cdot dx}{\sqrt{2} \cdot \cos^3 x \cdot \sin^{1/2} x \cdot \cos^{1/2} x} \\
 &= \int \frac{1}{\cos^{7/2} x \cdot \sin^{1/2} x} dx \\
 &= \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x \cdot \cos^{3/2} x \cdot \sin^{1/2} x} dx \\
 &= \int \frac{\sin^{2-1/2} x \cdot \sec^2 x}{\cos^{3/2} x} dx + \int \frac{\cos^{2-3/2} x \cdot \sec^2 x}{\sin^{1/2} x} dx \\
 &= \int \frac{\sin^{3/2} x \cdot \sec^2 x}{\cos^{3/2} x} dx + \int \frac{\cos^{1/2} x \cdot \sec^2 x}{\sin^{1/2} x} dx \\
 &= \int \tan^{3/2} x \cdot \sec^2 x dx + \int \cot^{1/2} x \cdot \sec^2 x dx \\
 &= \int \tan^{3/2} x \cdot \sec^2 x dx + \int \frac{1}{\tan^{1/2} x} \cdot \sec^2 x dx \\
 &= \int \tan^{3/2} x \cdot \sec^2 x dx + \int \tan^{-1/2} x \cdot \sec^2 x dx \\
 &= \frac{2}{5} \tan^{5/2} x + 2 \tan^{1/2} x + C \\
 &= \frac{2}{5} \sqrt{\tan x} \cdot \tan^2 x + 2\sqrt{\tan x} + C \\
 &= \frac{2}{5} \left[\sqrt{\tan x} (\tan^2 x + 5) \right] + C
 \end{aligned}$$

Ejercicios Propuestos

$$\textcircled{1} \int \cot^3 2x dx = -\frac{1}{4} \cot^2 2x - \frac{1}{2} \ln |\operatorname{sen} 2x| + c$$

$$\textcircled{2} \int \sec^4 \frac{x}{2} dx = \frac{2}{3} \tan^3 \frac{x}{2} + 2 \tan \frac{x}{2} + c$$

$$\textcircled{3} \int \tan^5 3x dx = \frac{1}{12} \tan^4 3x - \frac{1}{6} \tan^2 3x + \frac{1}{3} \ln |\sec 3x| + c$$

$$\textcircled{4} \int \tan^6 x dx = \frac{1}{5} \tan^5 x - \frac{1}{3} \tan^3 x + \tan x - x + c$$

$$\textcircled{5} \int \cot^3 x \csc^3 x dx = \frac{1}{5} \csc^5 x + \frac{1}{3} \csc^3 x + c$$

Resolución



$$\textcircled{6} \int \tan^4 x \sec^4 x dx = \frac{1}{7} \tan^7 x + \frac{1}{5} \tan^5 x + c$$

$$\textcircled{7} \int \tan^5 x \sec^3 x dx = \frac{1}{7} \sec^7 x - \frac{2}{5} \sec^5 x + \frac{1}{3} \sec^3 x + c$$

$$\textcircled{8} \int \tan^6 x \sec^4 x dx = \frac{1}{9} \tan^9 x + \frac{1}{7} \tan^7 x + c$$

$$\textcircled{9} \int \tan^4 x \sec^6 x dx = \frac{1}{9} \tan^9 x + \frac{2}{7} \tan^7 x + \frac{1}{5} \tan^5 x + c$$

$$\textcircled{10} \int \tan^3 x \sec^{5/2} x dx = \frac{2}{9} \sec^{9/2} x - \frac{2}{5} \sec^{5/2} x + c$$

Resolución



Capítulo 3

Métodos de Integración

3.1. Integración por partes

El método de integración por partes es de mucha utilidad en la práctica, cuyo procedimiento es de la siguiente manera: Consideremos $u = f(x)$ y $v = g(x)$ dos funciones diferenciables en la variable x . De la fórmula para la diferencial de un producto de dos funciones se tiene:

$$d(uv) = u dv + v du$$

$$u dv = d(uv) - v du$$

integrando ambos lados de la igualdad,

$$\int u dv = uv - \int v du \quad (3.1)$$

La ecuación (3.1) se conoce como la "Fórmula para la integración por partes"

La fórmula de integración por partes es una herramienta útil en cálculo integral. Aquí está su explicación de manera más organizada:

1. **Descomposición del Integrand:** Para aplicar la fórmula de integración por partes, primero debemos descomponer el integrando en dos partes: (u) y (dv) . Elegimos (u) de tal manera que sea fácil de derivar y (dv) de tal manera que sea fácil de integrar.

2. Elección de (u) y (dv) :

- En general, es recomendable elegir (u) de tal manera que su derivada (du) sea más simple que la función original.
- Por otro lado, elegimos (dv) de tal manera que su integral (v) sea fácil de calcular.

3. **Situaciones Comunes:** La fórmula de integración por partes se utiliza con frecuencia cuando el integrando tiene:

- Un producto de funciones.
- Logaritmos.
- Funciones trigonométricas inversas (como $(\arcsin(x))$, $(\arccos(x))$, $(\arctan(x))$, etc.).

En resumen, la integración por partes nos permite simplificar integrales más complejas al intercambiar la derivación y la integración entre dos partes del integrando.

Ejercicios Resueltos

1 $\int x \cos x dx$

Resolución

Sean

$$u = x \rightarrow du = dx$$

$$dv = \cos x dx \rightarrow v = \sin x$$

entonces según la formula 3.1, se tiene que:

$$\int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + c$$

Téngase en cuenta que al hacer la sustitución

$$u = \cos x \rightarrow du = -\sin x dx$$

$$dv = x dx \rightarrow v = \frac{1}{2}x^2$$

entonces $\int x \cos x dx = \frac{1}{2}x^2 \cos x + \frac{1}{2}\int x^2 \operatorname{sen} x dx$. Pero evaluar $\int x^2 \operatorname{sen} x dx$ es más difícil que evaluar $\int x \cos x dx$. De ahí que la elección de los factores, en este caso, no es conveniente.

$$\textcircled{2} \int x^2 \ln x dx$$

Resolución

Sean

$$u = \ln x \rightarrow du = \frac{dx}{x}$$

$$dv = x^2 dx \rightarrow v = \frac{x^3}{3}$$

Luego, reemplazando en la fórmula

$$\int x^2 \ln x dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^3}{3} \frac{dx}{x} = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + c$$

$$\textcircled{3} \int x^3 e^{x^2} dx$$

Resolución

Sean

$$u = x^2 \rightarrow du = 2x dx$$

$$dv = x e^{x^2} dx \rightarrow v = \frac{1}{2} e^{x^2}$$

$$\int x^3 e^{x^2} dx = \frac{1}{2} x^2 e^{x^2} - \int x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} x^2 e^{x^2} - \frac{1}{2} e^{x^2} + c$$

$$\textcircled{4} \int \sec^3 x dx$$

Resolución

Hacemos que:

$$\int \sec^3 x dx = \int \sec x \sec^2 x dx$$

Sean

$$u = \sec x \rightarrow du = \sec x \tan x dx$$

$$dv = \sec^2 x \rightarrow v = \tan x$$

reemplazando en la fórmula:

$$\begin{aligned}\int \sec^3 x dx &= \sec x \tan x - \int \sec x \tan^2 x dx \\ &= \sec x \tan x - \int \sec x (\sec^2 x - 1) dx \\ &= \sec x \tan x - \int \sec^3 x dx + \int \sec x dx\end{aligned}$$

Agrupando adecuadamente:

$$2 \int \sec^3 x dx = \sec x \tan x + \int \sec x dx$$

Entonces:

$$\int \sec^3 x dx = \frac{1}{2} [\sec x \tan x + \ln |\sec x + \tan x|] + c$$

5 $I = \int x \ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right) dx$

Resolución

<ul style="list-style-type: none">• $u = \ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right) \Rightarrow du = \frac{-2dx}{1-x^2}$• $dv = x dx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2}$
--

$$\begin{aligned}I &= \int x \ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right) dx \\ &= \frac{x^2}{2} \ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right) - \int \frac{x^2}{2} \left(\frac{-2}{1-x^2} \right) dx \\ &= \frac{x^2}{2} \ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right) + \int \frac{x^2 - 1 + 1}{1-x^2} dx \\ &= \frac{x^2}{2} \ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right) - \int \frac{1}{x^2 - 1} dx - \int dx \\ &= \frac{x^2}{2} \ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right) - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right) - x + C \\ &= \frac{x^2 - 1}{2} \ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right) - x + C\end{aligned}$$

$$6 \quad I = \int \frac{e^x(x^2 + 1)}{(x + 1)^2} dx$$

Resolución

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{e^x(x^2 + 1)}{(x + 1)^2} dx = \int \frac{x^2 + 1}{x^2 + 2x + 1} e^x dx \\ &= \int \frac{x^2 + 2x + 1 - 2x}{x^2 + 2x + 1} e^x dx \\ &= \int \left(1 - \frac{2x}{(x + 1)^2} \right) e^x dx \\ &= \int e^x dx - 2 \int e^x \left(\frac{x + 1 - 1}{(x + 1)^2} \right) dx \\ &= e^x - 2 \int \frac{e^x dx}{x + 1} + 2 \int \frac{e^x}{(x + 1)^2} dx \end{aligned}$$

- $u = e^x \Rightarrow du = e^x dx$
- $dv = \frac{1}{(x + 1)^2} dx \Rightarrow v = \frac{-1}{x + 1}$

$$\begin{aligned} I &= e^x - 2 \int \frac{e^x dx}{x + 1} - 2 \left(\frac{e^x}{x + 1} \right) + 2 \int \frac{e^x dx}{x + 1} dx \\ &= e^x - \frac{2e^x}{x + 1} + C \end{aligned}$$

$$7 \quad I = \int \frac{x \cos x}{\operatorname{sen}^2 x} dx$$

Resolución

Sea:

- $u = x \Rightarrow du = dx$
- $dv = \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} dx \Rightarrow v = \frac{-1}{\operatorname{sen} x}$

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{x \cos x}{\operatorname{sen}^2 x} dx = \frac{-x}{\operatorname{sen} x} + \int \frac{dx}{\operatorname{sen} x} \\
&= \frac{-x}{\operatorname{sen} x} + \int \operatorname{csc} x dx \\
&= \frac{-x}{\operatorname{sen} x} + \ln | \operatorname{csc} x - \cot x | + C \\
&= \frac{-x}{\operatorname{sen} x} + \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C
\end{aligned}$$

8 $I = \int x^2 \ln(x^6 - 1) dx$

Resolución

Sea:

<ul style="list-style-type: none"> • $u = \ln(x^6 - 1) \Rightarrow du = \frac{1}{x^6 - 1} \cdot 6x^5 dx$ • $dv = x^2 dx \Rightarrow v = \frac{x^3}{3}$
--

$$\begin{aligned}
I &= \frac{x^3}{3} \ln(x^6 - 1) - 2 \int \frac{x^8}{x^6 - 1} dx \\
&= \frac{x^3}{3} \ln(x^6 - 1) - 2 \int \frac{x^8 - x^2 + x^2}{x^6 - 1} dx \\
&= \frac{x^3}{3} \ln(x^6 - 1) - 2 \int x^2 dx - 2 \int \frac{x^2 dx}{(x^3)^2 - 1} dx \\
&= \frac{x^3}{3} \ln(x^6 - 1) - \frac{2}{3} x^3 - \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x^3 - 1}{x^3 + 1} \right| + C \\
&= \frac{x^3}{3} \ln(x^6 - 1) - \frac{2}{3} x^3 - \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x^3 - 1}{x^3 + 1} \right| + C
\end{aligned}$$

9 $I = \int \frac{x \ln x}{(x^2 - 1)^{3/2}} dx$

Resolución

Sea:

<ul style="list-style-type: none"> • $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$ • $dv = \frac{x}{(x^2 - 1)^{3/2}} dx \Rightarrow v = \frac{-1}{\sqrt{x^2 - 1}}$
--

$$\begin{aligned}
 I &= -\frac{\ln x}{\sqrt{x^2 - 1}} + \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}} \\
 &= -\frac{\ln x}{\sqrt{x^2 - 1}} + \operatorname{arc\,sec} |x| + C
 \end{aligned}$$

10 $I = \int \frac{(x^2 + 1)e^x}{(x + 1)^2} dx$

Resolución

$$\begin{aligned}
 I &= \int \frac{(x^2 + 1)e^x}{x^2 + 2x + 1} dx = \int \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 + 2x + 1} \right) e^x dx \\
 &= \int \left(1 - \frac{2x}{(x + 1)^2} \right) e^x dx \\
 &= \int e^x dx - 2 \int \frac{xe^x}{(x + 1)^2} dx \\
 &= e^x - 2 \int \frac{xe^x}{(x + 1)^2} dx
 \end{aligned}$$

- $u = xe^x \Rightarrow du = e^x + xe^x dx$
- $dv = \frac{1}{(x + 1)^2} dx \Rightarrow v = \frac{-1}{x + 1}$

$$\begin{aligned}
 I &= e^x - 2 \left(\frac{-xe^x}{x + 1} + \int \frac{(x + 1)e^x}{(x + 1)} dx \right) \\
 &= e^x - 2 \left(\frac{-xe^x}{x + 1} + \int e^x dx \right) \\
 &= e^x + \frac{2xe^x}{x + 1} - 2e^x + C \\
 &= \frac{2x}{x + 1} e^x - e^x + C \\
 &= \left(\frac{2x - x - 1}{x + 1} \right) e^x + C \\
 &= \frac{x - 1}{x + 1} e^x + C
 \end{aligned}$$

11 $I = \int \frac{\arctan x}{x^2} dx$

Resolución

Sea:

$$\begin{aligned} \bullet & u = \arctan x \Rightarrow du = \frac{1}{1+x^2} dx \\ \bullet & dv = x^{-2} dx \Rightarrow v = \frac{-1}{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I &= \frac{-\arctan x}{x} + \int \frac{dx}{x(x^2+1)} \\ &= \frac{-\arctan x}{x} + \int \frac{x^2+1-x^2}{x(x^2+1)} dx \\ &= \frac{-\arctan x}{x} + \int \frac{x^2+1}{x(x^2+1)} dx - \int \frac{x^2}{x(x^2+1)} dx \\ &= \frac{-\arctan x}{x} + \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x}{x^2+1} dx \\ &= \frac{-\arctan x}{x} + \ln x - \frac{1}{2} \ln |x^2+1| + C \\ &= \frac{-\arctan x}{x} + \ln x - \ln |\sqrt{x^2+1}| + C \\ &= \frac{-\arctan x}{x} + \ln \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \right) + C \end{aligned}$$

12 $I = \int x^n \ln x dx \quad n \neq -1$

Resolución

Sea:

$$\begin{aligned} \bullet & u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x} \\ \bullet & dv = x^n dx \Rightarrow v = \frac{x^{n+1}}{n+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I &= \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \int \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{dx}{x} \\ &= \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{1}{n+1} \int x^n dx \\ &= \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{1}{n+1} \left(\frac{x^{n+1}}{n+1} \right) + C \\ &= \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C \end{aligned}$$

13 $I = \int \sqrt{x} \ln^2 x dx$

Resolución

Sea:

$$\begin{aligned} \bullet & u = \ln^2 x \Rightarrow du = 2 \ln x \frac{dx}{x} \\ \bullet & dv = x^{1/2} dx \Rightarrow v = \frac{2}{3} x^{3/2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I &= \frac{2}{3} x^{3/2} \ln^2 x - \frac{2}{3} \int x^{3/2} \cdot 2 \ln x \cdot \frac{dx}{x} \\ &= \frac{2}{3} x^{3/2} \ln^2 x - \frac{4}{3} \int x^{1/2} \ln x dx \end{aligned}$$

Sea:

$$\begin{aligned} \bullet & u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x} \\ \bullet & dv = x^{1/2} dx \Rightarrow v = \frac{2}{3} x^{3/2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I &= \frac{2}{3} x^{3/2} \ln^2 x - \frac{4}{3} \cdot \frac{2}{3} x^{3/2} \ln x + \frac{8}{9} \int x^{3/2} \frac{dx}{x} \\ &= \frac{2}{3} x^{3/2} \ln^2 x - \frac{8}{9} x^{3/2} \ln x + \frac{8}{9} \int x^{1/2} dx \\ &= \frac{2}{3} x^{3/2} \ln^2 x - \frac{8}{9} x^{3/2} \ln x + \frac{8}{9} \cdot \frac{2}{3} x^{3/2} + C \\ &= \frac{2}{3} x^{3/2} \ln^2 x - \frac{8}{9} x^{3/2} \ln x + \frac{16}{27} x^{3/2} + C \end{aligned}$$

14 $I = \int \frac{\arcsen x}{x^2} dx$

Resolución

Sea:

$$\begin{aligned} \bullet & u = \arcsen x & \bullet & dv = x^{-2} dx \\ & du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx & & v = -\frac{1}{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I &= \frac{-\arcsen x}{x} + \int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{-\arcsen x}{x} + \int \frac{xdx}{x^2\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

Sea:

$$\begin{aligned} \bullet u &= \sqrt{1-x^2} & \implies x^2 &= 1-u^2 \\ u^2 &= 1-x^2 \\ 2udu &= -2xdx \\ -udu &= xdx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I &= \frac{-\arcsin x}{x} - \int \frac{udu}{(1-u^2)u} \\ &= \frac{-\arcsin x}{x} + \int \frac{du}{u^2-1} \\ &= -\frac{1}{x} \arcsin x + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{u-1}{u+1} \right| + C \\ &= -\frac{1}{x} \arcsin x + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{1-x^2}-1}{\sqrt{1-x^2}+1} \right| + C \end{aligned}$$

$$15 \quad I = \int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$$

Resolución

Por partes, sea:

$$\begin{aligned} \bullet u &= \ln x & \bullet dv &= x^{-1/2} dx \\ du &= \frac{1}{x} dx & v &= 2\sqrt{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I &= 2\sqrt{x} \ln x - 2 \int \frac{\sqrt{x}}{x} dx \\ &= 2\sqrt{x} \ln x - 2 \int x^{-1/2} dx \\ &= 2\sqrt{x} \ln x - 4\sqrt{x} + C \end{aligned}$$

$$16 \quad I = \int \frac{\ln x}{x^3} dx$$

Resolución

Por partes, sea:

$$\begin{aligned} \bullet u &= \ln x & \bullet dv &= x^{-3} dx \\ du &= \frac{1}{x} dx & v &= -\frac{x^{-2}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I &= -\frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x \cdot x^2} dx \\
&= -\frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{2} \int x^{-3} dx \\
&= -\frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{x^{-2}}{-2} \right) + C \\
&= -\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + C \\
&= -\frac{1}{4x^2} (2 \ln x + 1) + C
\end{aligned}$$

17 $I = \int (x^2 - 2x + 3) \ln x dx$

Resolución

Por partes, sea:

• $u = \ln x$	• $dv = (x^2 - 2x + 3)dx$
$du = \frac{1}{x}dx$	$v = \frac{x^3}{3} - x^2 + 3x$

$$\begin{aligned}
I &= \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x \right) \ln x - \frac{1}{3} \int \frac{(x^3 - 3x^2 + 9x)}{x} dx \\
&= \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x \right) \ln x - \frac{1}{3} \int (x^2 - 3x + 9) dx \\
&= \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x \right) \ln x - \frac{1}{3} \left(\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 9x \right) + C \\
&= \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x \right) \ln x - \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{2} - 3x + C
\end{aligned}$$

18 $I = \int \operatorname{sen}(\ln x) dx$

Resolución

Por partes, sea:

• $u = \operatorname{sen}(\ln x)$	• $dv = dx$
$du = \cos(\ln x) \frac{1}{x} dx$	$v = x$

$$\begin{aligned}
 I &= x \operatorname{sen}(\ln x) - \int \frac{x \cos(\ln x)}{x} dx \\
 &= x \operatorname{sen}(\ln x) - \int \cos(\ln x) dx
 \end{aligned}$$

$\bullet \quad u = \cos(\ln x)$	$\bullet \quad dv = dx$
$du = -\operatorname{sen}(\ln x) \frac{1}{x} dx$	$v = x$

$$\begin{aligned}
 I &= x \operatorname{sen}(\ln x) - x \cos(\ln x) - \int \frac{x \operatorname{sen}(\ln x)}{x} dx \\
 &= x \operatorname{sen}(\ln x) - x \cos(\ln x) - \int \operatorname{sen}(\ln x) dx \\
 2I &= x \operatorname{sen}(\ln x) - x \cos(\ln x) + C \\
 I &= \frac{x}{2} (\operatorname{sen}(\ln x) - \cos(\ln x)) + C
 \end{aligned}$$

19 $I = \int \ln^2 x dx$

Resolución

Por partes, sea:

$\bullet \quad u = \ln^2 x$	$\bullet \quad dv = dx$
$du = 2 \ln(x) \cdot \frac{1}{x} dx$	$v = x$

$$I = x \ln^2 x - 2 \int \ln x dx$$

$\bullet \quad u = \ln x$	$\bullet \quad dv = dx$
$du = \frac{1}{x} dx$	$v = x$

$$\begin{aligned}
 I &= x \ln^2 x - 2x \ln x + 2 \int dx \\
 &= x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x + C
 \end{aligned}$$

20 $I = \int \frac{\ln(\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} dx$

Resolución

$$I = \int \ln(\operatorname{sen} x) \cdot \sec^2 x dx$$

Por partes, sea:

$\bullet u = \ln(\operatorname{sen} x)$	$\bullet dv = \sec^2 x dx$
$du = \frac{1}{\operatorname{sen} x} \cdot \cos x dx$	$v = \tan x$

$$\begin{aligned} I &= \tan x \cdot \ln(\operatorname{sen} x) - \int \tan x \cdot \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} dx \\ &= \tan x \cdot \ln(\operatorname{sen} x) - \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \cdot \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} dx \\ &= \tan x \cdot \ln(\operatorname{sen} x) - \int dx \\ &= \tan x \cdot \ln(\operatorname{sen} x) - x + C \end{aligned}$$

$$\textcircled{21} \quad I = \int \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x+1}} dx$$

Resolución

$\bullet z = \sqrt{x+1} \implies z^2 = x+1$
$\implies 2z dz = dx$

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\ln z^2}{z} \cdot 2z dz \\ &= 2 \int \ln z^2 \cdot dz \\ &= 4 \int \ln z \cdot dz \end{aligned}$$

Por partes, sea:

$\bullet u = \ln(z)$	$\bullet dv = dz$
$du = \frac{dz}{z}$	$v = z$

$$\begin{aligned}
I &= 4z \ln z - 4 \int \frac{z dz}{z} \\
&= 4z \ln z - 4 \int dz \\
&= 4z \ln z - 4z + C \\
&= 4\sqrt{x+1} \cdot \ln(\sqrt{x+1}) - 4\sqrt{x+1} + C \\
&= 4\sqrt{x+1} \left(\frac{1}{2} \ln(x+1) - 1 \right) + C
\end{aligned}$$

22 $I = \int \frac{x \ln(x + \sqrt{1 + x^2})}{\sqrt{1 + x^2}} dx$

Resolución

Por partes, sea:

$$\begin{aligned}
&\bullet u = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) \\
du &= \frac{1}{x + \sqrt{1 + x^2}} \left(1 + \frac{1}{2}(1 + x^2)^{-1/2} \cdot 2x \right) dx \\
du &= \frac{1 + x/\sqrt{1 + x^2}}{x + \sqrt{1 + x^2}} dx \\
du &= \frac{\sqrt{1 + x^2} + x}{(x + \sqrt{1 + x^2}) \cdot \sqrt{1 + x^2}} dx \\
du &= \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}}
\end{aligned}$$

$$\bullet dv = \frac{x dx}{\sqrt{1 + x^2}} \implies v = \sqrt{1 + x^2}$$

$$\begin{aligned}
I &= \sqrt{1 + x^2} \cdot \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) - \int \frac{\sqrt{1 + x^2}}{\sqrt{1 + x^2}} dx \\
&= \sqrt{1 + x^2} \cdot \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) - \int dx \\
&= \sqrt{1 + x^2} \cdot \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) - x + C
\end{aligned}$$

23 $I = \int \sqrt{a + x^2} \cdot dx$

Resolución

Por partes, sea:

$$\begin{aligned}
&\bullet u = \sqrt{a + x^2} & \bullet dv = dx \\
du &= \frac{x dx}{\sqrt{a + x^2}} & v &= x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I &= x\sqrt{a+x^2} - \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a+x^2}} \\
&= x\sqrt{a+x^2} - \int \frac{(x^2+a-a)dx}{\sqrt{a+x^2}} \\
&= x\sqrt{a+x^2} - \int \frac{a+x^2}{\sqrt{a+x^2}} dx + \int \frac{a}{\sqrt{a+x^2}} dx \\
&= x\sqrt{a+x^2} - \int \frac{(a+x^2)\sqrt{a+x^2}}{a+x^2} dx + a \int \frac{dx}{\sqrt{a+x^2}} \\
&= x\sqrt{a+x^2} - \int \sqrt{a+x^2} dx + a \int \frac{dx}{\sqrt{a+x^2}} \\
2I &= x\sqrt{a+x^2} + a \ln |x + \sqrt{a+x^2}| + C \\
I &= \frac{1}{2} \left(x\sqrt{a+x^2} + a \ln |x + \sqrt{a+x^2}| \right) + C
\end{aligned}$$

24 $I = \int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}} \cdot dx$

Resolución

Por partes, sea:

• $u = x$	• $dv = \frac{x}{\sqrt{9-x^2}} dx$
$du = dx$	$v = -\sqrt{9-x^2}$

$$\begin{aligned}
I &= -x\sqrt{9-x^2} + \int \sqrt{9-x^2} \cdot dx \\
&= -x\sqrt{9-x^2} + \int \frac{9-x^2}{\sqrt{9-x^2}} \cdot dx \\
&= -x\sqrt{9-x^2} + 9 \int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} - \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{9-x^2}} \\
2I &= -x\sqrt{9-x^2} + 9 \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{x}{3} + C \\
I &= \frac{1}{2} \left(9 \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{x}{3} - x\sqrt{9-x^2} \right) + C
\end{aligned}$$

25 $I = \int \frac{\ln(\ln x)}{x} \cdot dx$

Resolución

Por partes, sea:

• $u = \ln(\ln x)$	• $dv = \frac{dx}{x}$
$du = \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} \cdot dx$	$v = \ln x$

$$\begin{aligned}
I &= \ln x \cdot \ln(\ln x) - \int \frac{\ln(x)}{x \ln(x)} \cdot dx \\
&= \ln x \cdot \ln(\ln x) - \int \frac{dx}{x} \\
&= \ln x \cdot \ln(\ln x) - \ln x + C \\
&= \ln x [\ln(\ln x) - 1] + C
\end{aligned}$$

26 $I = \int \sec^3 x \cdot dx$

Resolución

$$I = \int \sec x \cdot \sec^2 x \cdot dx$$

Por partes, sea:

• $u = \sec x$	• $dv = \sec^2 x \, dx$
$du = \sec x \cdot \tan x \, dx$	$v = \tan x$

$$\begin{aligned}
I &= \sec x \cdot \tan x - \int \sec x \cdot \tan^2 x \, dx \\
&= \sec x \cdot \tan x - \int \sec x \cdot (\sec^2 x - 1) \, dx \\
&= \sec x \cdot \tan x - \int \sec^3 x \, dx + \int \sec x \, dx \\
2I &= \sec x \cdot \tan x + \int \sec x \, dx \\
I &= \frac{1}{2} (\sec x \cdot \tan x + \ln |\sec x + \tan x|) + C
\end{aligned}$$

27 $I = \int e^{2x} \operatorname{sen} x \cdot dx$

Resolución

Por partes:

• $u = e^{2x}$	• $dv = \operatorname{sen} x \, dx$
$du = 2e^{2x} \, dx$	$v = -\cos x$

$$I = -e^{2x} \cos x + 2 \int e^{2x} \cos x \, dx$$

• $u = e^{2x}$	• $dv = \cos x \, dx$
$du = 2e^{2x} \, dx$	$v = \text{sen } x$

$$I = -e^{2x} \cos x + 2e^{2x} \text{sen } x - 4 \int e^{2x} \text{sen } x \, dx$$

$$5I = -e^{2x} \cos x + 2e^{2x} \text{sen } x + C$$

$$I = \frac{1}{5} e^{2x} (2 \text{sen } x - \cos x) + C$$

28 $I = \int \frac{e^{1/x}}{x^3} \cdot dx$

Resolución

Hacemos un cambio de variable :

• $z = \frac{1}{x} \implies dz = \frac{-dx}{x^2} \implies -x^2 dz = dx$

reemplazando a la integral se tiene

$$I = \int \frac{e^z (-x^2 dz)}{\frac{1}{z} \cdot x^2} = \int z e^z dz$$

Por partes:

• $u = z$	• $dv = e^z dz$
$du = dz$	$v = e^z$

$$I = z e^z - \int e^z dz$$

$$= z e^z - e^z + C$$

$$= e^{1/x} \left(\frac{1}{x} - 1 \right) + C$$

Ejercicios Propuestos

1 $\int x^n \ln x dx$

2 $\int \frac{\ln^3 x}{x^2} dx$

3 $\int x^3 \ln^2 x dx$

4 $\int \ln^2 x dx$

5 $\int \frac{x \ln x}{(1-x^2)^{1/2}} dx$

Resolución



6 $\int x \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) dx$

7 $\int \frac{\ln x}{x^3} dx$

8 $\int \frac{\ln(\ln x)}{x} dx$

9 $\int (x^2 - 2x + 5)e^x dx$

Resolución



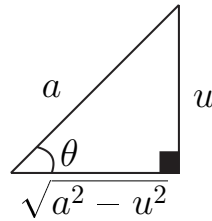
3.2. Integración por sustitución Trigonométrica

Cuando el integrando contiene expresiones de la forma:

función

$$\int \sqrt{a^2 - u^2} \cdot du$$

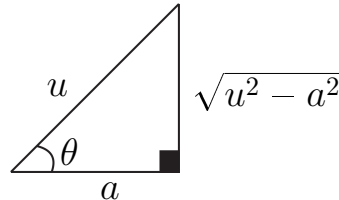
Triángulo a construir



Sustitución

$$\begin{aligned} \frac{u}{a} &= \text{sen } \theta \\ u &= a \text{ sen } \theta \\ du &= a \text{ cos } \theta d\theta \end{aligned}$$

$$\int \sqrt{u^2 - a^2} \cdot du$$



$$\begin{aligned} \frac{u}{a} &= \text{sec } \theta \\ u &= a \text{ sec } \theta \\ du &= a \text{ sec } \theta \text{ tan } \theta d\theta \end{aligned}$$

Ejercicios Resueltos

- 1 Evaluar la integral $\int \frac{x^2}{\sqrt{16 - x^2}} dx$

Solución

Hacemos $x = 4 \text{ sen } \theta \implies \text{sen } \theta = \frac{x}{4}$:

Luego trazamos un triángulo rectángulo.

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{\sqrt{16 - x^2}} dx &= \int \frac{(4 \text{ sen } \theta)^2 (4 \text{ cos } \theta d\theta)}{\sqrt{16 - (4 \text{ sen } \theta)^2}} \\ &= 16 \int \text{sen}^2 \theta d\theta \\ &= 16 \int \frac{1 - \text{cos } 2\theta}{2} d\theta \\ &= 8(\theta - \text{sen } \theta \text{ cos } \theta) + c \\ &= 8 \left(\text{arc sen } \left(\frac{x}{4} \right) - \frac{x\sqrt{16 - x^2}}{16} \right) + c \end{aligned}$$

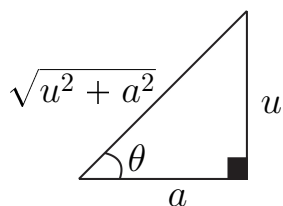
- 2 Calcular: $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 9}} dx$

Solución

Hacemos $x = 3 \text{ tan } \theta \implies \text{tan } \theta = \frac{x}{3}$

Luego trazamos un triángulo rectángulo, tal como se muestra en la figura.

$$\int \sqrt{u^2 + a^2} \cdot du$$

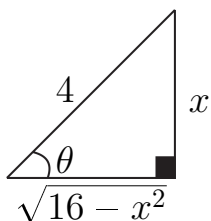


$$\begin{aligned} \frac{u}{a} &= \tan \theta \\ u &= a \tan \theta \\ du &= a \sec^2 \theta d\theta \end{aligned}$$

$$x = 4 \operatorname{sen} \theta$$

$$dx = 4 \cos \theta d\theta$$

- $4 \cos \theta = \sqrt{16 - x^2}$



$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 9}} dx &= \int \frac{(3 \tan \theta)^2 (3 \sec^2 \theta d\theta)}{\sqrt{(3 \tan \theta)^2 + 9}} \\ &= 9 \int \tan^2 \theta \sec \theta d\theta \\ &= 9 \int (\sec^2 \theta - 1) \sec \theta d\theta \\ &= 9 \int (\sec^3 \theta - \sec \theta) d\theta \\ &= \frac{9}{2} \tan \theta \sec \theta \\ &= \frac{x \sqrt{x^2 + 9}}{2} \end{aligned}$$

3 Calcular el valor de la integral: $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 16}}$

Solución

Hacemos $x = 4 \sec \theta \implies \sec \theta = \frac{x}{4}$.

Luego trazamos un triángulo rectángulo, tal como se muestra en la figura.

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 16}} &= \int \frac{(16 \sec^2 \theta)(4 \sec \theta \tan \theta d\theta)}{\sqrt{16 \sec^2 \theta - 16}} \\ &= 16 \int \sec^3 \theta d\theta \\ &= 8 \sec \theta \tan \theta + 8 \ln |\sec \theta + \tan \theta| + c \\ &= 8 \left(\frac{x}{4}\right) + 8 \ln \left| \frac{x}{4} + \frac{\sqrt{x^2 - 16}}{4} \right| + c \\ &= 2x + 8 \ln |x + \sqrt{x^2 - 16}| + c \end{aligned}$$

4 $I = \int \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}} dx$

$$x = 3 \tan \theta$$

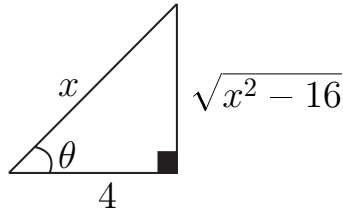
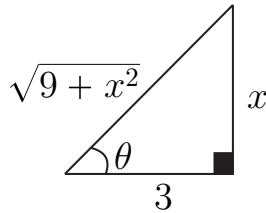
$$dx = 3 \sec^2 \theta d\theta$$

- $3 \tan \theta = x$

$$x = 4 \sec \theta$$

$$dx = 4 \sec \theta \cdot \tan \theta d\theta$$

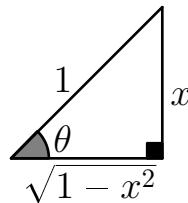
- $4 \tan \theta = \sqrt{16 - x^2}$



Solución

Sea:

$$x = \text{sen } \theta \implies dx = \text{cos } \theta d\theta$$



- $\text{cos } \theta = \sqrt{1 - x^2}$

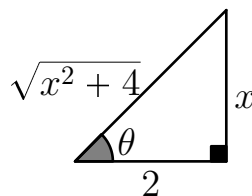
Reemplazando se tiene:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\text{sen}^2 \theta}{\text{cos } \theta} \cdot \text{cos } \theta d\theta = \int \text{sen}^2 \theta d\theta \\ &= \int \left(\frac{1 - \text{cos } 2\theta}{2} \right) d\theta \\ &= \frac{1}{2} (\theta - \text{sen } 2\theta) + C \\ &= \frac{1}{2} (\text{arc sen } x - 2 \text{sen } \theta \text{cos } \theta) + C \\ &= \frac{1}{2} (\text{arc sen } x - 2x\sqrt{1 - x^2}) + C \end{aligned}$$

5 $I = \int \sqrt{4 + x^2} dx$

Solución

Sea: $x = 2 \tan \theta \implies dx = 2 \sec^2 \theta d\theta$



- $2 \sec \theta = \sqrt{x^2 + 4}$

Reemplazando se tiene:

$$I = \int 2 \sec \theta \cdot 2 \sec^2 \theta d\theta = 4 \int \sec \theta \cdot \sec^2 \theta d\theta$$

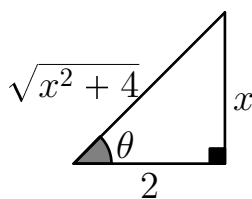
- $u = \sec \theta \Rightarrow du = \sec \theta \tan \theta d\theta$
- $dv = \sec^2 \theta d\theta \Rightarrow v = \tan \theta$

$$\begin{aligned} I &= 4 \tan \theta \sec \theta - 4 \int \sec \theta \cdot \tan^2 \theta d\theta \\ &= 4 \tan \theta \sec \theta - 4 \int \sec \theta (\sec^2 \theta - 1) d\theta \\ &= 4 \tan \theta \sec \theta - 4 \int \sec^3 \theta d\theta + 4 \int \sec \theta d\theta \\ 5I &= 4 \tan \theta \sec \theta + 4 \int \sec \theta d\theta \\ I &= \frac{4}{5} \tan \theta \sec \theta + \frac{4}{5} \ln |\sec \theta + \tan \theta| + C \\ &= \frac{4}{5} x \sqrt{4 + x^2} + \frac{4}{5} \ln \left| \frac{\sqrt{4 + x^2}}{2} + \frac{x}{2} \right| + C \end{aligned}$$

6 $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4}}$

Solución

Sea: $x = 2 \tan \theta \implies dx = 2 \sec^2 \theta d\theta$



- $2 \sec \theta = \sqrt{x^2 + 4}$

Reemplazando se tiene:

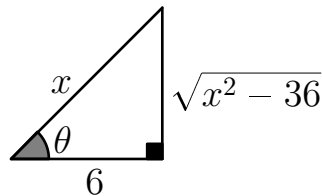
$$\begin{aligned} I &= \int \frac{2 \sec^2 \theta d\theta}{2 \sec \theta} = \int \sec \theta d\theta \\ &= \ln |\sec \theta + \tan \theta| + C \\ &= \ln \left| \frac{\sqrt{x^2 + 4} + x}{2} \right| + C \end{aligned}$$

$$7 \quad I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 36}}$$

Solución

Sea:

$$x = 6 \sec \theta \implies dx = 6 \sec \theta \tan \theta d\theta$$



- $6 \tan \theta = \sqrt{x^2 - 36}$

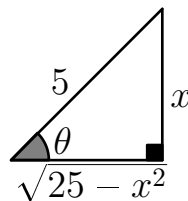
Reemplazando se tiene:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{6 \sec \theta \tan \theta}{6 \tan \theta} d\theta = \int \sec \theta d\theta \\ &= \ln |\sec \theta + \tan \theta| + C \\ &= \ln \left| \frac{x + \sqrt{x^2 - 36}}{6} \right| + C \end{aligned}$$

$$8 \quad I = \int \frac{dx}{(25 - x^2)^{3/2}}$$

Solución

Sea: $x = 5 \sin \theta \implies dx = 5 \cos \theta d\theta$



- $5 \cos \theta = \sqrt{25 - x^2}$

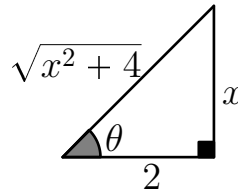
Reemplazando se tiene:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{5 \cos \theta d\theta}{5^3 \cos^3 \theta} = \frac{1}{25} \int \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta \\ &= \frac{1}{25} \int \sec^2 \theta d\theta \\ &= \frac{1}{25} \tan \theta + C \\ &= \frac{1}{25} \left(\frac{x}{\sqrt{25 - x^2}} \right) + C \end{aligned}$$

$$9 \quad I = \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 + 4}}$$

Solución

Sea: $x = 2 \tan \theta \implies dx = 2 \sec^2 \theta d\theta$



- $2 \sec \theta = \sqrt{x^2 + 4}$

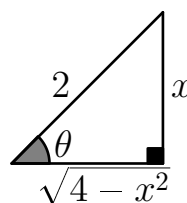
Reemplazando se tiene:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{2 \sec^2 \theta}{4 \tan^2 \theta \cdot 2 \sec \theta} d\theta = \frac{1}{4} \int \frac{\sec \theta}{\tan^2 \theta} d\theta \\ &= \frac{1}{4} \int \frac{1}{\frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta}} d\theta \\ &= \frac{1}{4} \int \frac{\cos \theta}{\cos^2 \theta} d\theta \\ &= \frac{1}{4} \int \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} d\theta \\ &= -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sin \theta} + C \\ &= -\frac{1}{4} \left(\frac{\sqrt{x^2 + 4}}{4} \right) + C \end{aligned}$$

$$10 \quad I = \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{4 - x^2}}$$

Solución

Sea: $x = 2 \sin \theta \implies dx = 2 \cos \theta d\theta$



- $2 \cos \theta = \sqrt{4 - x^2}$

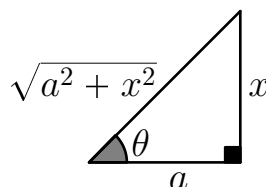
Reemplazando se tiene:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{2 \cos \theta d\theta}{4 \operatorname{sen}^2 \theta \cdot 2 \cos \theta} = \frac{1}{4} \int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \theta} d\theta \\ &= \frac{1}{4} \int \operatorname{csc}^2 \theta d\theta \\ &= -\frac{1}{4} \cot \theta + C \\ &= -\frac{1}{4} \left(\frac{\sqrt{4-x^2}}{x} \right) + C \end{aligned}$$

11 $I = \int \sqrt{a^2 + x^2} dx$

Solución

Sea: $x = a \tan \theta \implies dx = a \sec^2 \theta d\theta$



- $a \sec \theta = \sqrt{a^2 + x^2}$

Reemplazando se tiene:

$$I = \int a \sec \theta \cdot \sec^2 \theta d\theta = a^2 \int \sec^2 \theta \sec \theta d\theta$$

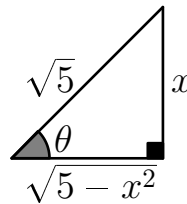
- | |
|---|
| <ul style="list-style-type: none">• $u = \sec \theta \implies du = \sec \theta \tan \theta d\theta$• $dv = \sec^2 \theta d\theta \implies v = \tan \theta$ |
|---|

$$\begin{aligned}
I &= a^2 \tan \theta \sec \theta - a^2 \int \sec \theta \cdot \tan^2 \theta d\theta \\
&= a^2 \tan \theta \sec \theta - a^2 \int \sec \theta (\sec^2 \theta - 1) d\theta \\
&= a^2 \tan \theta \sec \theta - a^2 \int \sec^3 \theta d\theta + a^2 \int \sec \theta d\theta \\
(1 + a^2)I &= a^2 \tan \theta \sec \theta + a^2 \int \sec \theta d\theta \\
I &= \frac{a^2}{1 + a^2} \tan \theta \sec \theta + \frac{a^2}{1 + a^2} \ln |\sec \theta + \tan \theta| + C \\
&= \frac{a^2}{1 + a^2} \left(x\sqrt{a^2 + x^2} + \ln \left| \frac{\sqrt{a^2 + x^2} + x}{a} \right| \right) + C
\end{aligned}$$

12 $I = \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{5 - x^2}}$

Solución

Sea: $x = \sqrt{5} \operatorname{sen} \theta \implies dx = \sqrt{5} \cos \theta d\theta$



- $\sqrt{5} \cos \theta = \sqrt{5 - x^2}$

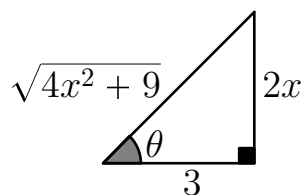
Reemplazando se tiene:

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{\sqrt{5} \cos \theta d\theta}{5 \operatorname{sen}^2 \theta \cdot \sqrt{5} \cos \theta} = \frac{1}{5} \int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \theta} d\theta \\
&= \frac{1}{5} \int \operatorname{csc}^2 \theta d\theta \\
&= -\frac{1}{5} \cot \theta + C \\
&= -\frac{1}{5} \left(\frac{\sqrt{5 - x^2}}{x} \right) + C
\end{aligned}$$

13 $I = \int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2 + 9}}$

Solución

Sea: $2x = 3 \tan \theta \implies dx = \frac{3}{2} \sec^2 \theta d\theta$



- $3 \sec \theta = \sqrt{x^2 + 9}$

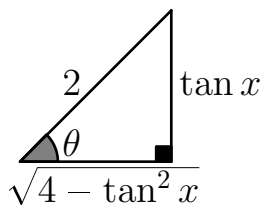
Reemplazando se tiene:

$$\begin{aligned}
 I &= \int \frac{\frac{3}{2} \sec^2 \theta d\theta}{\frac{3}{2} \tan \theta \cdot \sec \theta} = \frac{1}{3} \int \frac{\sec \theta}{\tan \theta} d\theta \\
 &= \frac{1}{3} \int \frac{1/\cos \theta}{\sin \theta / \cos \theta} d\theta \\
 &= \frac{1}{3} \int \csc \theta d\theta \\
 &= \frac{1}{3} \ln |\csc \theta - \cot \theta| + C \\
 &= \frac{1}{3} \ln \left| \frac{\sqrt{4x^2 + 9} - 3}{2x} \right| + C
 \end{aligned}$$

14 $I = \int \frac{\sec^2 x dx}{(4 - \tan^2 x)^{3/2}}$

Solución

Sea: $\tan x = 2 \sin \theta \implies \sec^2 x dx = 2 \cos \theta d\theta$



- $2 \cos \theta = \sqrt{4 - \tan^2 x}$

Reemplazando se tiene:

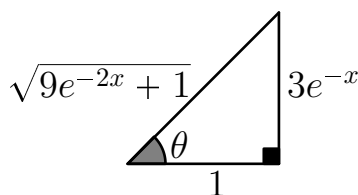
$$\begin{aligned}
 I &= \int \frac{2 \cos \theta d\theta}{2^3 \cdot \cos^3 \theta} = \frac{1}{4} \int \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta \\
 &= \frac{1}{4} \int \sec^2 \theta d\theta \\
 &= \frac{1}{4} \tan \theta + C \\
 &= \frac{1}{4} \left(\frac{\tan x}{\sqrt{4 - \tan^2 x}} \right) + C
 \end{aligned}$$

15 $I = \int \frac{e^{-x} dx}{(9e^{-2x} + 1)^{3/2}}$

Solución

$$I = - \int \frac{-e^{-x} dx}{((3e^{-x})^2 + 1)^{3/2}}$$

Sea: $3e^{-x} = \tan \theta \implies -e^{-x} dx = \frac{1}{3} \sec^2 \theta d\theta$



- $\sec \theta = \sqrt{9e^{-2x} + 1}$

Reemplazando se tiene:

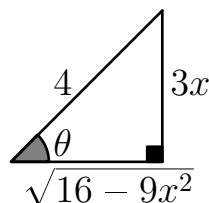
$$\begin{aligned}
 I &= - \int \frac{\frac{1}{3} \sec^2 \theta d\theta}{\sec^3 \theta} = - \frac{1}{3} \int \frac{1}{\sec \theta} d\theta \\
 &= - \frac{1}{3} \int \cos \theta d\theta \\
 &= - \frac{1}{3} \operatorname{sen} \theta + C \\
 &= - \frac{1}{3} \left(\frac{3e^{-x}}{\sqrt{9e^{-2x} + 1}} \right) + C \\
 &= \frac{-e^{-x}}{\sqrt{9e^{-2x} + 1}} + C
 \end{aligned}$$

16 $I = \int \frac{(16 - 9x^2)^{3/2} dx}{x^6}$

Solución

$$I = \int \frac{(4^2 - (3x)^2)^{3/2} dx}{x^6}$$

Sea: $3x = 4 \operatorname{sen} \theta \implies dx = \frac{4}{3} \cos \theta d\theta$



- $4 \cos \theta = \sqrt{16 - 9x^2}$

Reemplazando se tiene:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{(4 \cos \theta)^3}{\left(\frac{4}{3} \operatorname{sen} \theta\right)^6} \cdot \frac{4}{3} \cos \theta d\theta \\ &= \frac{3^5}{4^2} \int \frac{\cos^4 \theta}{\operatorname{sen}^6 \theta} d\theta \\ &= \frac{3^5}{16} \int \cot \theta \operatorname{csc} \theta d\theta \\ &= \frac{3^5}{16} \left(\frac{-\cot^5 \theta}{5} \right) + C \\ &= -\frac{3^5}{16(5)} \left(\frac{\sqrt{16 - 9x^2}}{3x} \right)^5 + C \\ &= -\frac{1}{80} \cdot \frac{(16 - 9x^2)^{5/2}}{x^5} + C \end{aligned}$$

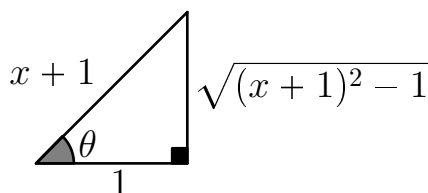
17 $I = \int \frac{dx}{(x+1)^3 \cdot \sqrt{x^2 + 2x}}$

Solución

$$I = \int \frac{dx}{(x+1)^3 \cdot \sqrt{x^2 + 2x + 1 - 1}}$$

$$I = \int \frac{dx}{(x+1)^3 \cdot \sqrt{(x+1)^2 - 1}}$$

Sea: $x + 1 = \sec \theta \implies dx = \sec \theta \tan \theta d\theta$



- $\tan \theta = \sqrt{(x+1)^2 - 1}$

Reemplazando se tiene:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\sec \theta \tan \theta}{\sec^3 \theta \tan \theta} d\theta \\ &= \int \frac{1}{\sec^2 \theta} d\theta \\ &= \int \cos^2 \theta d\theta \\ &= \int \left(\frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \left(\theta + \frac{\sen 2\theta}{2} \right) + C \\ &= \frac{1}{2} (\operatorname{arc sec}(x+1) + \sen \theta \cos \theta) + C \\ &= \frac{1}{2} \left(\operatorname{arc sec}(x+1) + \frac{\sqrt{(x+1)^2 - 1}}{(x+1)^2} \right) + C \end{aligned}$$

Ejercicios Propuestos

1 $\int \frac{x^2}{(16 - x^2)^{3/2}} dx$

2 $\int \frac{\sqrt{4 + x^2}}{x^6} dx$

3 $\int \frac{\sqrt{25 - x^2}}{x} dx$

4 $\int \frac{(16 - 9x^2)^{3/2}}{x^6} dx$

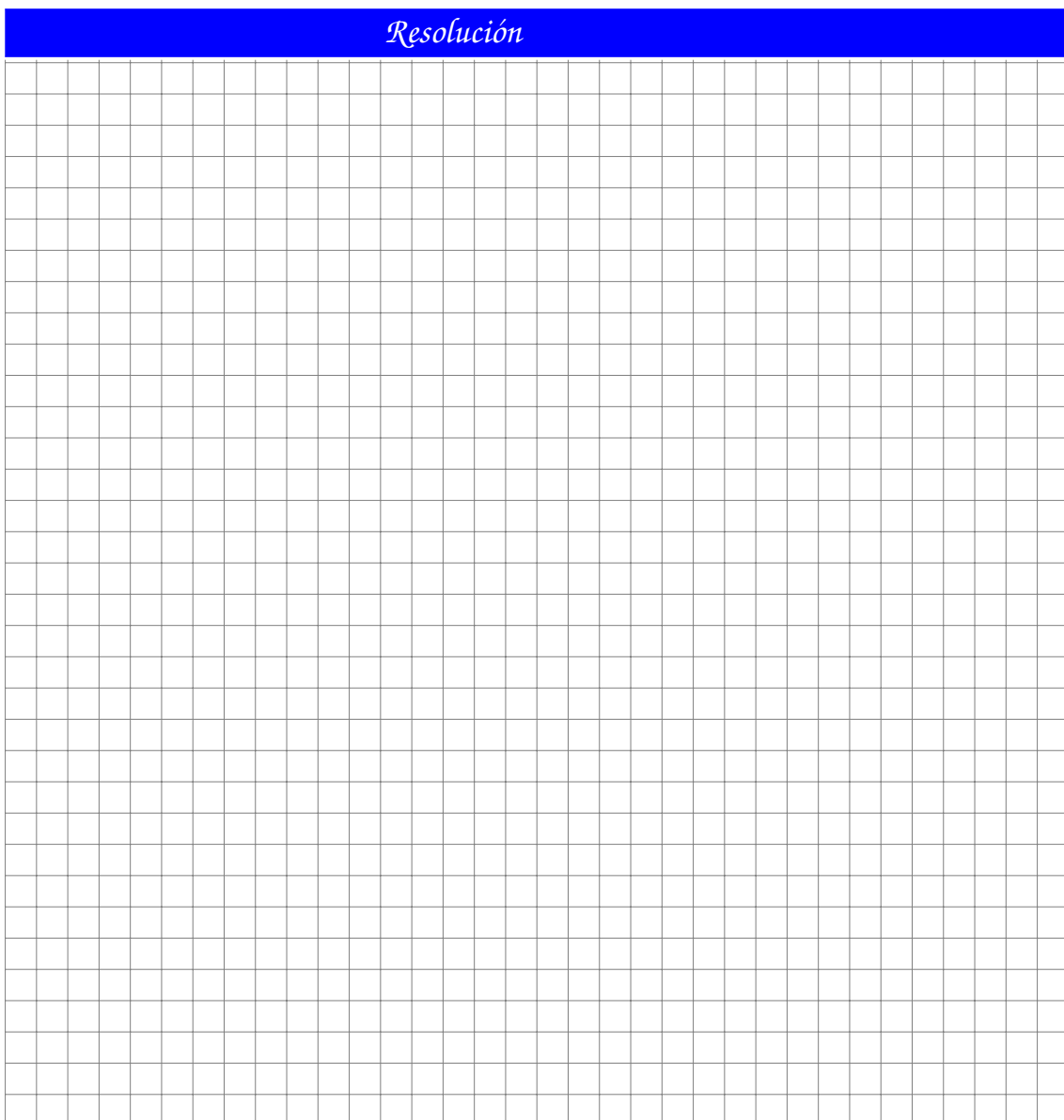
5 $\int x^2 \sqrt{16 - x^2} dx$

6 $\int \frac{1 + \sqrt{x^2 + 1}}{(x^2 + 1)^{3/2}} dx$

7 $\int x^2 \sqrt{4 - x^2} dx$

8 $\int \frac{x^2}{\sqrt{21 + 4x - x^2}} dx$

Resolución



9 $\int \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} dx$

13 $\int \frac{\sqrt{x^2 - 8}}{x^4} dx$

10 $\int \frac{dx}{(x^2 + 5)^{3/2}}$

14 $\int \frac{\sqrt{x^2 + 2x}}{x} dx$

11 $\int \frac{\sqrt{x^2 - 16}}{x} dx$

15 $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{1 + x^2}}$

12 $\int \frac{(x + 1)dx}{\sqrt{9 - x^2}}$

16 $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{4 - x^2}}$

Resolución

A large grid of graph paper for solving the problems.

3.3. Integración de Funciones Racionales

Cuando la función a integrar es de la forma $H(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios tales que el grado de $P(x)$ es menor que el grado de $Q(x)$, entonces se procede a integrar $H(x)$ descomponiendo previamente en fracciones parciales, como se muestra en los ejemplos siguientes:

Ejercicios Resueltos

1 $\int \frac{x dx}{x^2 - 3x - 4}$

Resolución

Como los factores del denominador $Q(x) = x^2 - 3x - 4 = (x - 4)(x + 1)$ son lineales y distintos, entonces:

$$\frac{x}{(x - 4)(x + 1)} = \frac{A}{x - 4} + \frac{B}{x + 1} = \frac{(A + B)x + (A - 4B)}{(x - 4)(x + 1)}$$

Entonces $\begin{cases} A + B = 1 \\ A - 4B = 0 \end{cases} \rightarrow A = \frac{4}{5} \wedge B = \frac{1}{5}$, luego reemplazando estos valores se tiene

$$\begin{aligned} \int \frac{x dx}{x^2 - 3x - 4} &= \int \left(\frac{4/5}{x - 4} + \frac{1/5}{x + 1} \right) dx \\ &= \frac{4}{5} \ln |x - 4| + \frac{1}{5} \ln |x + 1| \\ &= \frac{1}{5} \ln |(x - 4)^4(x + 1)| + c \end{aligned}$$

2 $\int \frac{3x^2 + 5x}{x^3 + x^2 - x - 1} dx$

Resolución

Factorizando el denominador $Q(x) = x^3 + x^2 - x - 1 = (x - 1)(x + 1)^2$, entonces:

$$\frac{3x^2 + 5x}{(x - 1)(x + 1)^2} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1} + \frac{C}{(x + 1)^2} = \frac{(A + B)x^2 + (2A + C - B)x + A - C}{(x - 1)(x + 1)^2}$$

Entonces $\begin{cases} A + B = 3 \\ 2A + C - B = 5 \\ A - C = 0 \end{cases} \rightarrow A = 2, B = 1, C = 2$, luego reemplazando estos

valores se tiene

$$\begin{aligned}\int \frac{x dx}{x^3 + x^2 - x - 1} &= \int \left(\frac{2}{x-1} + \frac{1}{x+1} + \frac{2}{(x+1)^2} \right) dx \\ &= 2 \ln |x-1| + \ln |x+1| - \frac{2}{x+1} \\ &= \ln |(x-1)^2(x+1)| - \frac{2}{x+1} + c\end{aligned}$$

3 $\int \frac{x^3 + x^2 + x + 2}{x^4 + 3x^2 + 2} dx$

Resolución

Factorizando el denominador $Q(x) = x^4 + 3x^2 + 2 = (x^2 + 1)(x^2 + 2)$, entonces:

$$\frac{x^3 + x^2 + x + 2}{(x^2 + 1)(x^2 + 2)} = \frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + 2} = \frac{(A + C)x^3 + (B + D)x^2 + (2A + C)x + 2B + D}{(x^2 + 1)(x^2 + 2)}$$

$$\text{Entonces } \begin{cases} A + C = 1 \\ B + D = 1 \\ 2A + C = 1 \\ 2B + D = 2 \end{cases} \implies \begin{cases} A = 0 \\ B = 1 \\ C = 1 \\ D = 0 \end{cases}$$

luego reemplazando estos valores se tiene

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3 + x^2 + x + 2}{x^4 + 3x^2 + 2} dx &= \int \left(\frac{1}{x^2 + 1} + \frac{x}{x^2 + 2} \right) dx \\ &= \arctan x + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 2) + c\end{aligned}$$

4 $\int \frac{x dx}{x^2 - 3x - 4}$

Resolución

Como los factores del denominador

$$Q(x) = x^2 - 3x - 4 = (x - 4)(x + 1)$$

son lineales y distintos, entonces:

$$\frac{x}{(x-4)(x+1)} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+1} = \frac{(A+B)x + (A-4B)}{(x-4)(x+1)}$$

$$\text{Entonces } \begin{cases} A + B = 1 \\ A - 4B = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} A = \frac{4}{5} \\ B = \frac{1}{5} \end{cases},$$

luego reemplazando estos valores se tiene:

$$\begin{aligned} \int \frac{xdx}{x^2 - 3x - 4} &= \int \left(\frac{4/5}{x-4} + \frac{1/5}{x+1} \right) dx \\ &= \frac{4}{5} \ln|x-4| + \frac{1}{5} \ln|x+1| \\ &= \frac{1}{5} \ln|(x-4)^4(x+1)| + c \end{aligned}$$

$$\textcircled{5} \int \frac{3x^2 + 5x}{x^3 + x^2 - x - 1} dx$$

Resolución

Factorizando el denominador

$Q(x) = x^3 + x^2 - x - 1 = (x-1)(x+1)^2$, entonces:

$$\begin{aligned} \frac{3x^2 + 5x}{(x-1)(x+1)^2} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} \\ &= \frac{(A+B)x^2 + (2A+C-B)x + A-C}{(x-1)(x+1)^2} \end{aligned}$$

$$\text{Entonces } \begin{cases} A + B = 3 \\ 2A + C - B = 5 \\ A - C = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} A = 2 \\ B = 1 \\ C = 2 \end{cases},$$

luego reemplazando estos valores se tiene:

$$\begin{aligned} \int \frac{xdx}{x^3 + x^2 - x - 1} &= \int \left(\frac{2}{x-1} + \frac{1}{x+1} + \frac{2}{(x+1)^2} \right) dx \\ &= 2 \ln|x-1| + \ln|x+1| - \frac{2}{x+1} \\ &= \ln|(x-1)^2(x+1)| - \frac{2}{x+1} + c \end{aligned}$$

$$\textcircled{6} \int \frac{x^3 + x^2 + x + 2}{x^4 + 3x^2 + 2} dx$$

Resolución

Factorizando el denominador

$Q(x) = x^4 + 3x^2 + 2 = (x^2 + 1)(x^2 + 2)$, entonces:

$$\frac{x^3 + x^2 + x + 2}{(x^2 + 1)(x^2 + 2)} = \frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + 2}$$

$$= \frac{(A + C)x^3 + (B + D)x^2 + (2A + C)x + 2B + D}{(x^2 + 1)(x^2 + 2)}$$

$$\text{Entonces } \begin{cases} A + C = 1 \\ B + D = 1 \\ 2A + C = 1 \\ 2B + D = 2 \end{cases} \implies \begin{cases} A = 0 \\ B = 1 \\ C = 1 \\ D = 0 \end{cases}$$

luego reemplazando estos valores se tiene:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x^3 + x^2 + x + 2}{x^4 + 3x^2 + 2} dx = \int \left(\frac{1}{x^2 + 1} + \frac{x}{x^2 + 2} \right) dx \\ &= \arctan x + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 2) + c \end{aligned}$$

7 $\int \frac{2x^2 - 3x - 2}{x^3 + x^2 - 2x} dx$

Resolución

$$I = \int \frac{2x^2 - 3x - 2}{x(x + 2)(x - 1)} dx$$

$$\frac{2x^2 - 3x - 2}{x(x + 2)(x - 1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x + 2} + \frac{C}{x - 1}$$

$$2x^2 - 3x - 2 = A(x + 2)(x - 1) + Bx(x - 1) + Cx(x + 2)$$

$$\begin{cases} \bullet \text{ para } x = 0 \implies -2 = -2A \implies A = 1 \\ \bullet \text{ para } x = 1 \implies -3 = 3C \implies C = -1 \\ \bullet \text{ para } x = -2 \implies 12 = 6B \implies B = 2 \end{cases}$$

Luego reemplazando:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{x} + \int \frac{2dx}{x + 2} + \int \frac{-1dx}{x - 1} \\ &= \int \frac{dx}{x} + 2 \int \frac{dx}{x + 2} - \int \frac{dx}{x - 1} \\ &= \ln |x| + 2 \ln |x + 2| - \ln |x - 1| + C \\ &= \ln \left| \frac{x(x + 2)^2}{x - 1} \right| + C \end{aligned}$$

$$8 \int \frac{dx}{x^2 - 3x + 1}$$

Resolución

$$I = \int \frac{dx}{\left(x^2 - 3x + \frac{9}{4}\right) - \frac{9}{4} + 1} = \int \frac{dx}{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2}$$

$$\frac{1}{\left(x - \frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)} = \frac{A}{x - \frac{3 + \sqrt{5}}{2}} + \frac{B}{x - \frac{3 - \sqrt{5}}{2}}$$

$$1 = A\left(x - \frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right) + B\left(x - \frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)$$

$$\begin{cases} \bullet \text{ para } x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \implies 1 = -\sqrt{5}B \implies B = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \bullet \text{ para } x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \implies 1 = \sqrt{5}A \implies A = \frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

Luego reemplazando:

$$I = \int \frac{1/\sqrt{5}dx}{x - \frac{3 + \sqrt{5}}{2}} + \int \frac{-1/\sqrt{5}dx}{x - \frac{3 - \sqrt{5}}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \int \frac{dx}{x - \frac{3 + \sqrt{5}}{2}} - \frac{1}{\sqrt{5}} \int \frac{dx}{x - \frac{3 - \sqrt{5}}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \ln \left| x - \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right| - \frac{1}{\sqrt{5}} \ln \left| x - \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right| + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \ln \left| \frac{2x - 3 - \sqrt{5}}{2x - 3 + \sqrt{5}} \right| + C$$

$$9 \int \frac{x + 3}{x^2 + 3x + 2} dx$$

Resolución

$$\frac{x + 3}{(x + 2)(x + 1)} = \frac{A}{x + 2} + \frac{B}{x + 1}$$

$$x + 3 = A(x + 1) + B(x + 2)$$

$$\begin{cases} \bullet \text{ para } x = -1 \implies 2 = B \\ \bullet \text{ para } x = -2 \implies 1 = -A \implies A = -1 \end{cases}$$

Luego reemplazando:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{-1dx}{x+2} + \int \frac{2dx}{x+1} \\ &= -\ln|x+2| + 2\ln|x+1| + \ln C \\ &= \ln \left| \frac{C(x+1)^2}{x+2} \right| \end{aligned}$$

10 $\int \frac{dx}{x^3 + 3x^2}$

Resolución

$$\frac{1}{x^2(x+3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+3}$$

$$1 = Ax(x+3) + B(x+3) + Cx^2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{ para } x=0 \implies 1 = 3B \implies B = \frac{1}{3} \\ \bullet \text{ para } x=-3 \implies 1 = 9C \implies C = \frac{1}{9} \\ \bullet \text{ para } x=1 \implies 1 = 4A + 4B + C \implies A = \frac{-1}{9} \end{array} \right.$$

Luego reemplazando:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{-1/9dx}{x} + \int \frac{1/3dx}{x^2} + \int \frac{1/9dx}{x+3} \\ &= -\frac{1}{9} \int \frac{dx}{x} + \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x^2} + \frac{1}{9} \int \frac{dx}{x+3} \\ &= -\frac{1}{9} \ln|x| - \frac{1}{3x} + \frac{1}{9} \ln|x+3| + C \\ &= \frac{1}{9} \ln \left| \frac{x+3}{x} \right| - \frac{1}{3x} + C \end{aligned}$$

11 $\int \frac{x^4 - 8}{x^3 + 2x^2} dx$

Resolución

Resolviendo por división de polinomios se tiene:

$$\frac{x^4 - 8}{x^3 + 2x^2} = x - 2 + \frac{4x^2 - 8}{x^2(x+2)} = \int \left(x - 2 + \frac{4x^2 - 8}{x^2(x+2)} \right) dx$$

$$I = \int x dx - 2 \int dx + 4 \int \frac{x^2 - 2}{x^2(x+2)} dx$$

$$I = \frac{x^2}{2} - 2x + 4 \int \frac{x^2 - 2}{x^2(x+2)} dx$$

$$\frac{x^2 - 2}{x^2(x + 2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x + 2}$$

$$x^2 - 2 = Ax(x + 2) + B(x + 2) + Cx^2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{ para } x = -2 \implies 2 = 4C \implies C = \frac{1}{2} \\ \bullet \text{ para } x = 0 \implies -2 = 2B \implies B = -1 \\ \bullet \text{ para } x = 1 \implies -1 = 3A + 3B + C \implies A = \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

Luego reemplazando:

$$\begin{aligned} I &= \frac{x^2}{2} - 2x + 4 \int \frac{1/2 dx}{x} + 4 \int \frac{-1 dx}{x^2} + 4 \int \frac{1/2 dx}{x + 2} \\ &= \frac{x^2}{2} - 2x + 2 \int \frac{dx}{x} - 4 \int x^{-2} dx + 2 \int \frac{dx}{x + 2} \\ &= \frac{x^2}{2} - 2x + 2 \ln |x| + \frac{4}{x} + 2 \ln |x + 2| + C \\ &= \frac{x^2}{2} - 2x + 2 \ln |x(x + 2)| + \frac{4}{x} + C \end{aligned}$$

12 $\int \frac{x^2 - 3x - 7}{(2x + 3)(x + 1)^2} dx$

Resolución

$$\frac{x^2 - 3x - 7}{(2x + 3)(x + 1)^2} = \frac{A}{2x + 3} + \frac{B}{x + 1} + \frac{C}{(x + 1)^2}$$

$$x^2 - 3x - 7 = A(x + 1)^2 + B(x + 1)(2x + 3) + C(2x + 3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{ para } x = -1 \implies -3 = C \implies C = -3 \\ \bullet \text{ para } x = -\frac{3}{2} \implies -\frac{1}{4} = A(-1/2)^2 \implies A = -1 \\ \bullet \text{ para } x = 0 \implies -7 = A + 3B + 3C \implies B = 1 \end{array} \right.$$

Luego reemplazando:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{-1 dx}{2x + 3} + \int \frac{dx}{x + 1} + \int \frac{-3 dx}{(x + 1)^2} \\ &= -\int \frac{dx}{2x + 3} + \int \frac{dx}{x + 1} - 3 \int (x + 1)^{-2} dx \\ &= -\frac{1}{2} \ln |2x + 3| + \ln |x + 1| + \frac{3}{x + 1} + C \end{aligned}$$

13 $\int \frac{x^4}{(1 - x)^3} dx$

Resolución

$$I = \int \frac{x^4}{-x^3 + 3x^2 - 3x + 1} dx$$

Resolviendo por división de polinomios se tiene:

$$I = \int \left(-x - 3 + \frac{6x^2 - 8x + 3}{(1-x)^3} \right) dx$$

$$I = -\int x dx - 3 \int dx + \int \frac{6x^2 - 8x + 3}{(1-x)^3} dx$$

$$I = -\frac{x^2}{2} - 3x + \int \frac{6x^2 - 8x + 3}{(1-x)^3} dx$$

$$\frac{6x^2 - 8x + 3}{(1-x)^3} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{(1-x)^2} + \frac{C}{(1-x)^3}$$

$$6x^2 - 8x + 3 = A(1-x)^2 + B(1-x) + C$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{ para } x = 1 \implies 1 = C \implies C = 1 \\ \bullet \text{ para } x = -1 \implies 17 = 4A + 2B + 1 \\ \bullet \text{ para } x = 0 \implies 3 = A + B + 1 \end{array} \right.$$

Resolviendo los dos últimas ecuaciones se tiene:

$$A = 6 \quad y \quad B = -4$$

Luego reemplazando:

$$\begin{aligned} I &= -\frac{x^2}{2} - 3x + \int \frac{6dx}{1-x} + \int \frac{-4dx}{(1-x)^2} + \int \frac{dx}{(1-x)^3} \\ &= -\frac{x^2}{2} - 3x + 6 \int \frac{dx}{1-x} - 4 \int (1-x)^{-2} dx + \int (1-x)^{-3} dx \\ &= -\frac{x^2}{2} - 3x - 6 \ln |1-x| - \frac{4}{1-x} + \frac{1}{2(1-x)^2} + C \\ &= -\frac{x^2}{2} - 3x - \ln |1-x|^6 - \frac{4}{1-x} + \frac{1}{2(1-x)^2} + C \end{aligned}$$

14 $\int \frac{x^4 + x^2 + 2x + 1}{x^4(x+1)^2} dx$

Resolución

$$\frac{x^4 + x^2 + 2x + 1}{x^4(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x^4} + \frac{E}{x+1} + \frac{F}{(x+1)^2}$$

$$x^4 + x^2 + 2x + 1 = Ax^3(x+1)^2 + Bx^2(x+1)^2 + Cx(x+1)^2$$

$$+ D(x+1)^2 + E(x+1)x^4 + Fx^4$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{ para } x = -1 \implies 1 = F \implies F = 1 \\ \bullet \text{ para } x = 0 \implies 1 = D \implies D = 1 \end{array} \right.$$

Por otro lado los coeficientes de la ecuación:

$$x^4 + x^2 + 2x + 1 = (A + E)x^5 + (2A + B + E + F)x^4 + (A + 2B + C)x^3 + (B + 2C + D)x^2 + (C + 2D)x + D$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{ para } 2x \implies 2 = C + 2D \implies C = 0 \\ \bullet \text{ para } 1x^2 \implies 1 = B + 2C + D \implies B = 0 \\ \bullet \text{ para } 0x^3 \implies 0 = A + 2B + C \implies A = 0 \\ \bullet \text{ para } 0x^5 \implies 0 = A + E \implies E = 0 \end{array} \right.$$

Luego reemplazando:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{x^4} + \int \frac{dx}{(x+1)^2} \\ &= \int x^{-4} dx + \int (x+1)^{-2} dx \\ &= \frac{x^{-3}}{-3} + \frac{(x+1)^{-1}}{-1} + C \\ &= -\frac{1}{3x^3} - \frac{1}{x+1} + C \end{aligned}$$

Ejercicios Propuestos

$$1 \int \frac{2x^2 + 41x - 91}{(x-1)(x+3)(x-4)} dx$$

$$8 \int \frac{x dx}{x^4 - 3x^2 + 2}$$

$$2 \int \frac{(2x^2 - 5)}{x^4 - 5x^2 + 6} dx$$

$$9 \int \frac{(x+1) dx}{x^3 + x^2 - 6x}$$

$$3 \int \frac{(2x+1)}{x^3 - 7x + 6} dx$$

$$10 \int \frac{(3x+5) dx}{x^3 - x^2 - x + 1}$$

$$4 \int \frac{4x^3 + 4x^2 - 18x + 6}{x^4 - 3x^3 - x^2 + 3x} dx$$

$$11 \int \frac{(3x-2) dx}{(x+2)(x+1)(x-1)}$$

$$5 \int \frac{dx}{x(a^2 - x^2)}$$

$$12 \int \frac{(2x^2 + 3x - 1) dx}{(x+3)(x+2)(x-1)}$$

$$6 \int \frac{32x dx}{(2x-1)(4x^2 - 16x + 15)}$$

$$13 \int \frac{dx}{x^2(x+1)^2}$$

$$7 \int \frac{(5x^3 + 2) dx}{x^3 - 5x^2 + 4x}$$

$$14 \int \frac{x^2 - 3x + 2}{x(x^2 + 2x + 1)} dx$$

3.4. Integrales de funciones racionales trigonométricas

Se tiene los siguientes casos:

CASO I: Integrales de la forma $\int f(\operatorname{sen} x, \cos x) dx$

donde f es una función racional en las variables $\operatorname{sen} x$ $\cos x$.

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} x &= 2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} \\ &= 2 \frac{\operatorname{sen} \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} \cdot \cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} \\ &= 2 \tan \frac{x}{2} \cdot \cos^2 \frac{x}{2} \\ &= 2 \tan \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{\sec^2 \frac{x}{2}} \\ &= \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos x &= \cos^2 \frac{x}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} \\ &= \left(\frac{\cos^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}} - \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}} \right) \cos^2 \frac{x}{2} \\ &= \left(1 - \tan^2 \frac{x}{2} \right) \cos^2 \frac{x}{2} \\ &= \left(1 - \tan^2 \frac{x}{2} \right) \frac{1}{\sec^2 \frac{x}{2}} \\ &= \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} \end{aligned}$$

Sea la sustitución trigonométrica universal:

$$z = \tan \frac{x}{2} \implies x = 2 \arctan z \implies dx = \frac{2dz}{1+z^2}$$

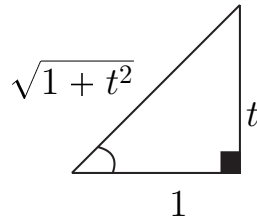
$$\boxed{\operatorname{sen} x = \frac{2z}{1+z^2} \quad , \quad \cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2} \quad , \quad dx = \frac{2dz}{1+z^2}}$$

CASO II: Integrales de la forma $\int f(\operatorname{sen}^k x, \cos^n x) dx$

con k, n números enteros pares: y $\int f(\tan x)$.

Sea:

$$t = \tan x \implies x = \arctan t \implies dx = \frac{dt}{1+t^2}$$



Se tiene:

$$\boxed{\operatorname{sen} x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \quad , \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \quad , \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}}$$

Ejercicios Resueltos

1 $\int \frac{dx}{2 + \operatorname{sen} x}$

Resolución

Usando la sustitución trigonométrica universal: $z = \tan \frac{x}{2}$

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{2 + \frac{2z}{1+z^2}} \\ &= \int \frac{2dz}{2 + 2z^2 + 2z} \\ &= \int \frac{dz}{z^2 + z + 1} \\ &= \int \frac{dz}{\left(z^2 + z + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4} + 1} \\ &= \int \frac{dz}{\left(z + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{z + \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \right) + C \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{2z + 1}{\sqrt{3}} \right) + C \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{2 \tan \frac{x}{2} + 1}{\sqrt{3}} \right) + C \end{aligned}$$

2 $\int \frac{dx}{4 + 3 \cos x}$

Resolución

Usando la sustitución universal: $z = \tan \frac{x}{2}$

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{2dz}{4 + 3 \left(\frac{1 - z^2}{1 + z^2} \right)} = \int \frac{2dz}{4 + 4z^2 + 3 - 3z^2} \\ &= 2 \int \frac{dz}{z^2 + 7} = 2 \int \frac{dz}{z^2 + (\sqrt{7})^2} \\ &= \frac{2}{\sqrt{7}} \arctan \left(\frac{z}{\sqrt{7}} \right) + C \\ &= \frac{2}{\sqrt{7}} \arctan \left(\frac{\tan \frac{x}{2}}{\sqrt{7}} \right) + C \end{aligned}$$

3 $\int \frac{dx}{5 - 3 \cos x}$

Resolución

Usando la sustitución universal: $z = \tan \frac{x}{2}$

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{2dz}{5 - 3 \left(\frac{1 - z^2}{1 + z^2} \right)} \\ &= \int \frac{2dz}{5 + 5z^2 - 3 + 3z^2} \\ &= 2 \int \frac{dz}{8z^2 + 2} \\ &= \int \frac{dz}{4z^2 + 1} \\ &= \frac{1}{2} \arctan 2z + C \\ &= \frac{1}{2} \arctan \left(2 \tan \frac{x}{2} \right) + C \end{aligned}$$

4 $\int \frac{\operatorname{sen} x \cdot dx}{1 + \operatorname{sen} x}$

Resolución

Usando la sustitución trigonométrica universal: $z = \tan \frac{x}{2}$

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\frac{2z}{1+z^2} \cdot \frac{2dz}{1+z^2}}{1 + \frac{2z}{1+z^2}} \\ &= \int \frac{4zdz}{(1+z^2)(1+z^2)} \\ &= 2 \int \frac{2zdz}{(1+z^2)^2} \\ &= 2 \int 2z(1+z^2)^{-2} dz \\ &= 2 \frac{(1+z^2)^{-1}}{-1} + C \\ &= \frac{-2}{1+z^2} + C \\ &= \frac{-2}{1+\tan^2 \frac{x}{2}} + C \end{aligned}$$

Ejercicios Diversos

1 $\int \frac{1}{x} \cdot \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \cdot dx$ Rta. $\arcsen\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} + C$

2 $\int \left(\arcsen x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx$ Rta. $x \arcsen x + C$

3 $\int \frac{dx}{x^6+1}$
 Rta. $\frac{\arctan x}{3} + \frac{1}{6} [\arctan(2x + \sqrt{3}) + \arctan(2x - \sqrt{3})] +$
 $+ \frac{\sqrt{3}}{12} \ln \left| \frac{x^2 + \sqrt{3}x + 1}{x^2 - \sqrt{3}x + 1} \right| + C$

4 $\int e^x (\cot x + \ln \operatorname{sen} x) dx$ Rta. $e^x \ln |\operatorname{sen} x| + C$

5 $\int \frac{dx}{\sqrt{x} \sqrt[3]{x} (1 + \sqrt[3]{x})^2}$ Rta. $3 \arctan x + \frac{3\sqrt[6]{x}}{1 + \sqrt[3]{x}} + C$

6 $\int \frac{x^2}{(1-x^4)^2} dx$ Rta. $\frac{x^4}{4(1-x^4)} + \frac{1}{4} \ln |1-x^4| + C$

7 $\int \frac{6e^{4x}}{1-e^x} dx$ Rta. $-2e^{3x} - 3e^{2x} - 6e^x - 6 \ln |e^x - 1| + C$

8 $\int \frac{\sqrt{a-x}}{\sqrt{a}-\sqrt{x}} dx$
 Rta. $a \arcsen\left(\frac{x}{a}\right) - 2\sqrt{a}\sqrt{a-x} - \sqrt{a-x}\sqrt{x} + C$

9 $\int \sqrt{4+e^x} \cdot dx$
 Rta. $2\sqrt{4+e^{2x}} + 2 \ln \left| \frac{\sqrt{4+e^x}-2}{\sqrt{4+e^x}+2} \right| + C$

10 $\int \frac{x+1}{(2x+x^2)\sqrt{2x+x^2}} dx$ Rta. $-\frac{1}{\sqrt{2x+x^2}} + C$

11 $\int e^{\sqrt[4]{x}} \cdot dx$ Rta. $e^{\sqrt[4]{x}} (4x^{3/4} - 12x^{1/2} + 24x^{1/4}) + C$

12 $\int \frac{1}{x^3} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) dx$ Rta. $\frac{1}{x} \cos\left(\frac{1}{x}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) + C$

13 $\int \frac{dx}{\sqrt{1+\cos x}}$ Rta. $\sqrt{2} \ln \left| \sec \frac{x}{2} + \tan \frac{x}{2} \right| + C$

14 $\int \frac{4^x+1}{2^x+1} dx$ Rta. $x - 2 \ln(2^x+1) + C$

15 $\int \sqrt{\frac{x+p}{x}} \cdot dx$
 Rta. $\sqrt{x^2+px} + p \ln(\sqrt{x} + \sqrt{x+p}) + C$

16 $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^4} \operatorname{arcsen} x \cdot dx$
 Rta. $-\frac{(1-x^2)^{3/2} \operatorname{arcsen} x}{3x^3} - \frac{1}{6x^2} - \frac{\ln x}{3} + C$

17 $\int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{m+n \cos^2 x} dx$
 Rta. $\sqrt{\frac{m+n}{mn^2}} \arctan\left(\frac{\sqrt{m} \tan x}{\sqrt{m+n}}\right) - \frac{x}{n} + C$

18 $\int \frac{2p+x}{p+x} \cdot \sqrt{\frac{p-x}{p+x}} \cdot dx$
 Rta. $\sqrt{p^2-x^2} - 2p \cdot \sqrt{\frac{p-x}{p+x}} + C$

19 $\int \frac{x^2-x}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2+1}} dx$
 Rta. $\frac{2}{3}(x+1)^{3/2} + \frac{1}{2}[x\sqrt{x^2+1} + \ln(x+\sqrt{x^2+1})] + C$

20 $\int \sqrt{\frac{x}{a^3-x^3}} \cdot dx$ Rta. $\frac{2}{3} \operatorname{arcsen}\left(\frac{x^{3/2}}{a^{3/2}}\right) + C$

21 $\int \sec x \cdot \sec 2x \cdot dx$
 Rta. $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\sqrt{2} \operatorname{sen} x}{1-\sqrt{2} \operatorname{sen} x} \right| - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x} \right| + C$

22 $\int \sqrt{\frac{4-x}{2+x}} dx$
 Rta. $3 \operatorname{arc} \cos\left(\frac{1-x}{3}\right) + 3\sqrt{x^2-2x+8} + C$

23 $\int \frac{e^x}{(e^x+1)\sqrt{e^x-1}} dx$ Rta. $\sqrt{2} \arctan \sqrt{\frac{e^x-1}{2}} + C$

24 $\int \frac{\sec x \cdot \sqrt{\sec 2x}}{\operatorname{arcsen}(\tan x)} dx$ Rta. $\ln |\operatorname{arcsen}(\tan x)| + C$

25 $\int \sqrt{\frac{1-\cos x}{\cos \alpha - \cos x}} \cdot dx$ Rta. $-2 \operatorname{arcsen}\left(\frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right) + C$

26 $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt[3]{1+e^x}} dx$ Rta. $\frac{3}{10} (2e^x-3)(1+e^x)^{2/3} + C$

-
- 27 $\int \frac{dx}{\cos x \cdot \sqrt{2 + \operatorname{sen}x}}$
 Rta. $\ln |\sqrt{1 + \operatorname{sen}x}| + \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \left| \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2 + \operatorname{sen}x}}{\sqrt{3} - \sqrt{2 - \operatorname{sen}x}} \right| + C$
- 28 $\int x^{17} \ln(x^2) dx$ Rta. $2x^{18} \left(\frac{\ln x}{18} - \frac{1}{324} \right) + C$
- 29 $\int \tanh(\ln x) dx$ Rta. $x - 2 \arctan x + C$
- 30 $\int \sqrt{1 - \cos x} \cdot dx$ Rta. $-2\sqrt{1 + \cos x} + C$
- 31 $\int \operatorname{sen} h^{-1} \left(\frac{x}{p} \right) dx$ Rta. $x \operatorname{sen} h^{-1} \left(\frac{x}{p} \right) - \sqrt{x^2 + p^2} + C$
- 32 $\int \frac{x e^{nx}}{(1 + nx)^2} dx$ Rta. $\frac{e^{nx}}{n^2(1 + nx)} + C$
- 33 $\int x^2 \arccos \left(\frac{x}{a} \right) dx$
 Rta. $\frac{x^3}{3} \arccos \left(\frac{x}{a} \right) - \frac{1}{9} (x^2 + 2a^2) \sqrt{a^2 - x^2} + C$
- 34 $\int \operatorname{coth}^{-1} \left(\frac{x}{a} \right) dx$
 Rta. $x \operatorname{coth}^{-1} \left(\frac{x}{a} \right) + \frac{a}{2} \ln(x^2 - a^2) + C$
- 35 $\int \frac{\arccos \left(\frac{x}{a} \right)}{x^2} dx$
 Rta. $-\frac{1}{x} \arccos \left(\frac{x}{a} \right) + \frac{1}{a} \ln \left(\frac{a + \sqrt{x^2 + a^2}}{x} \right) + C$
- 36 $\int \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right)^{10} dx$
 Rta. $\frac{1}{2} \left[\frac{\left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right)^{11}}{11} + \frac{\left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right)^9}{9} \right] + C$
- 37 $\int \frac{(\cos x - \operatorname{sen}x)}{5 + \operatorname{sen}2x} dx$
 Rta. $\frac{1}{2} \arctan \left(\frac{\cos x + \operatorname{sen}x}{2} \right) + C$
- 38 $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 \cos^2 \theta + x \operatorname{sen}2\theta + 1)^3}}$
 Rta. $\frac{1}{\cos^3 \theta} \cdot \frac{x \cos \theta + \operatorname{sen}\theta}{\sqrt{x^2 \cos^2 \theta + x \operatorname{sen}2\theta + 1}} + C$
- 39 $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}}$ Rta. $\frac{4}{3} \sqrt[4]{\frac{x-1}{x+2}} + C$
-

-
- 40 $\int \frac{(\cos 2x - 3)}{\cos^4 x \cdot \sqrt{4 - \cot^2 x}} dx$
 Rta. $-\frac{1}{3} \tan x (2 + \tan^2 x) \sqrt{4 - \cot^2 x} + C$
- 41 $\int \frac{\sqrt{(x^2 + 1)^5}}{x^6} dx$ Rta. $\ln(x + \sqrt{x + 1})^2 - \frac{\sqrt{(x^2 + 1)^5}}{5x^5} - \frac{\sqrt{(x^2 + 1)^3}}{3x^3} - \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} + C$
- 42 $\int \csc^5 x \sqrt{\operatorname{sen}^3(2x)} \cdot dx$ Rta. $-\frac{4\sqrt{2}}{5} \sqrt{\cot^5 x} + C$
- 43 $\int \frac{\sqrt{x^8 + 1}}{x^{13}} dx$ Rta. $-\frac{(x^8 + 1)^{3/2}}{12x^{12}} + C$
- 44 $\int \sqrt[3]{\operatorname{sen}^2 x \cdot \sec^{14} x} \cdot dx$
 Rta. $\frac{3}{55} \sqrt[3]{\tan^5 x} (5 \tan^2 x + 11) + C$
- 45 $\int \frac{\sec^3 x}{\sqrt{\operatorname{sen}(2x)}} dx$ Rta. $\frac{\sqrt{21}}{5} (\tan^2 x + 5) \sqrt{\tan x} + C$
- 46 $\int \frac{(1 + \operatorname{sen}^2 x) \sec^2 x}{2\sqrt{\operatorname{sen} x}} dx$ Rta. $\frac{\sqrt{\operatorname{sen} x}}{\cos x}$
- 47 $\int \frac{e^x(x^2 - 8)}{(x - 2)^2} dx$ Rta. $\frac{e^x(x + 2)}{x - 2} + C$
- 48 $I = \int e^{\operatorname{sen} x} (\sec^2 x - \csc^2 x + \csc x) dx$
 Rta. $e^{\operatorname{sen} x} (\tan x + \cot x) + C$
- 49 $I = \int \frac{(1 + x\sqrt{1 + x^2})}{e^{\operatorname{sen}hx} (1 + x^2)^{3/2}} dx$ Rta. $\frac{x e^{\operatorname{sen}h^{-1}x}}{(1 + x^2)^{3/2}} + C$
-

Capítulo 4

Integral Definida

La geometría plana aborda, entre otros aspectos, la búsqueda de áreas de figuras geométricas mediante fórmulas deducidas a través de procedimientos sencillos. Sin embargo, cuando deseamos hallar el área de una región plana cualquiera, estas fórmulas no son suficientes. Es aquí donde entra en juego el cálculo integral, que se ocupa fundamentalmente de determinar áreas para regiones arbitrarias.

El problema de encontrar áreas tiene una historia que se remonta a más de 200 años antes de Cristo. Arquímedes ideó un método para aproximar áreas al inscribir polígonos en la región dada, cuyas áreas fueran de fácil cálculo. Gradualmente, este método evolucionó y recibió su mayor impulso 18 siglos después gracias a los estudios realizados por Newton y Leibniz. Posteriormente, Agustín Luis Cauchy (1789-1857) y Bernhard Riemann (1826-1866) le dieron un fundamento riguroso.

Hoy en día, el cálculo integral constituye una disciplina poderosa y nueva. Sus aplicaciones no se limitan solo a áreas y volúmenes, sino que también abarcan múltiples problemas en otras ciencias, como ingeniería, economía, administración, biología, psicología, entre otras.

4.1. Teorema fundamental del Cálculo

La integral definida y la indefinida están relacionadas mediante un resultado muy valioso, que se presenta a continuación.

Teorema 1 (Teorema Fundamental del Cálculo) Sea $y = f(x)$ una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$. Si g es la antiderivada de f , sobre $[a, b]$, entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = g(b) - g(a)$$

4.2. Propiedades de la Integral Definida

Sean $y = f(x)$ y $y = g(x)$ dos funciones integrables en $[a, b]$, entonces:

1. $\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$
2. $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$
3. $\int_a^b kdx = k(b - a)$
4. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \quad (c \in [a, b])$
5. $\int_a^a f(x)dx = 0$
6. $\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$

Ejercicios Resueltos

Evaluar las siguientes integrales definidas, utilizando el teorema fundamental del cálculo:

1 $\int_{-1}^3 (3x^2 + 5x - 1)dx$

Resolución

La integral indefinida de $f(x) = 3x^2 + 5x - 1$ es $x^3 + \frac{5}{2}x^2 - x + c$, luego $g(x) = x^3 + \frac{5}{2}x^2 - x + c$, de donde $g(3) = \frac{93}{2} + c$ y $g(-1) = \frac{5}{2} + c$. Según el Teorema Fundamental del Cálculo se tiene:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^3 (3x^2 + 5x - 1)dx &= g(3) - g(-1) \\ &= \left(\frac{93}{2} + c\right) - \left(\frac{5}{2} + c\right) \\ &= 44 \end{aligned}$$

$$2 \int_{-1}^1 \frac{x}{3x^2 + 1} dx$$

Resolución

Hacemos $u = 3x^2 + 1 \rightarrow du = 6x dx$, luego tenemos:

$$\int \frac{x}{3x^2 + 1} dx = \frac{1}{6} \int \frac{6x}{3x^2 + 1} = \frac{1}{6} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{6} \ln u = \frac{1}{6} \ln(3x^2 + 1) + c$$

Luego:

$$\int_{-1}^1 \frac{x}{3x^2 + 1} dx = \left[\frac{1}{6} \ln(3x^2 + 1) + c \right]_{-1}^1 = \frac{1}{6} (\ln 4 - \ln 4) = 0$$

4.3. Aplicación a Areas de Regiones Planas

Una de las aplicaciones más importantes de la integral definida se encuentra en el calculo de área de una region plana limitada por una o mas curvas. Tenemos dos casos:

1. Consideremos una region R limitada por dos curvas y dos rectas, de ecuaciones $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = a$ y $x = b$; f y g son continuas en $[a, b]$ tales que $0 \leq g(x) \leq f(x)$ para todo $x \in [a, b]$. Esta region asi definida recibe el nombre de “region del tipo R_x ”, tal como se muestra en la figura 4.1. Desde que:

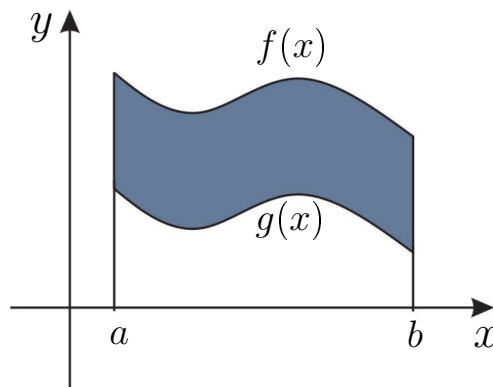


Figura 4.1:

$\int_a^b f(x) dx$ = área de la región limitada por la curva definida por $y = f(x)$ y el eje X, de $x = a$ a $x = b$.

$\int_a^b g(x) dx$ = área de la región limitada por la curva definida por $y = g(x)$ y el eje X, de $x = a$ a $x = b$.

Entonces el área de la región R está dado por $\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$, esto es:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

2. Una consideración similar nos conduce a encontrar el área de una región R del tipo R_y limitada por las curvas: $x = f(y)$, $x = g(y)$, $y = c$ y $y = d$; f y g son continuas en $[c, d]$ tales que $0 \leq g(y) \leq f(y)$ para todo $y \in [c, d]$ (ver figura 4.2) en la siguiente forma:

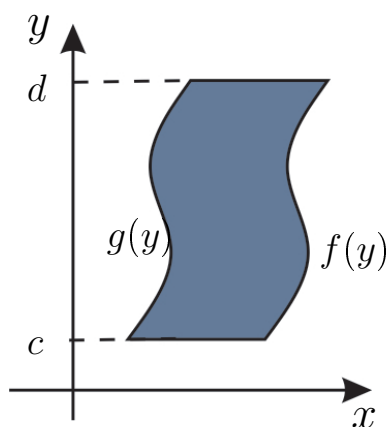


Figura 4.2:

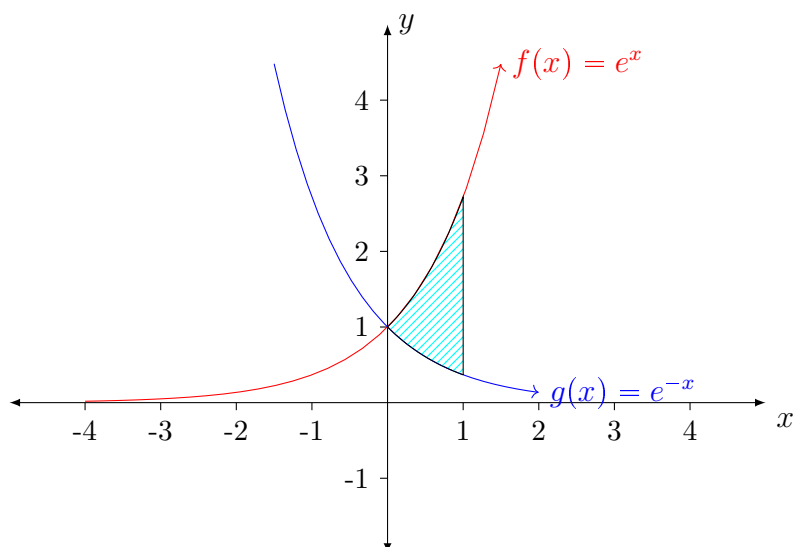
$$A = \int_c^d [f(y) - g(y)] dy$$

Ejercicios Resueltos

1. Encontrar el área acotadas por las curvas cuyas ecuaciones son $y = e^x$, $y = e^{-x}$ y la recta $x = 1$.

Resolución

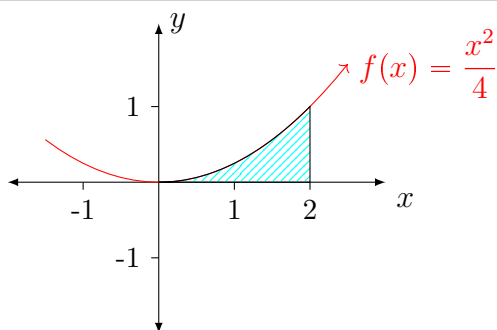
La región comprendida por $y = e^x$, $y = e^{-x}$ y la recta $x = 1$ es el gráfico dado en la figura.



$$A = \int_0^1 (e^x - e^{-x}) dx = [e^x - e^{-x}]_0^1 = e - e^{-1} - 2$$

- 2 Calcular el área de la región limitada por las curvas $y = \frac{1}{4}x^2$ y el eje X de $x = 0$ a $x = 2$, y luego grafique la región.

Resolución

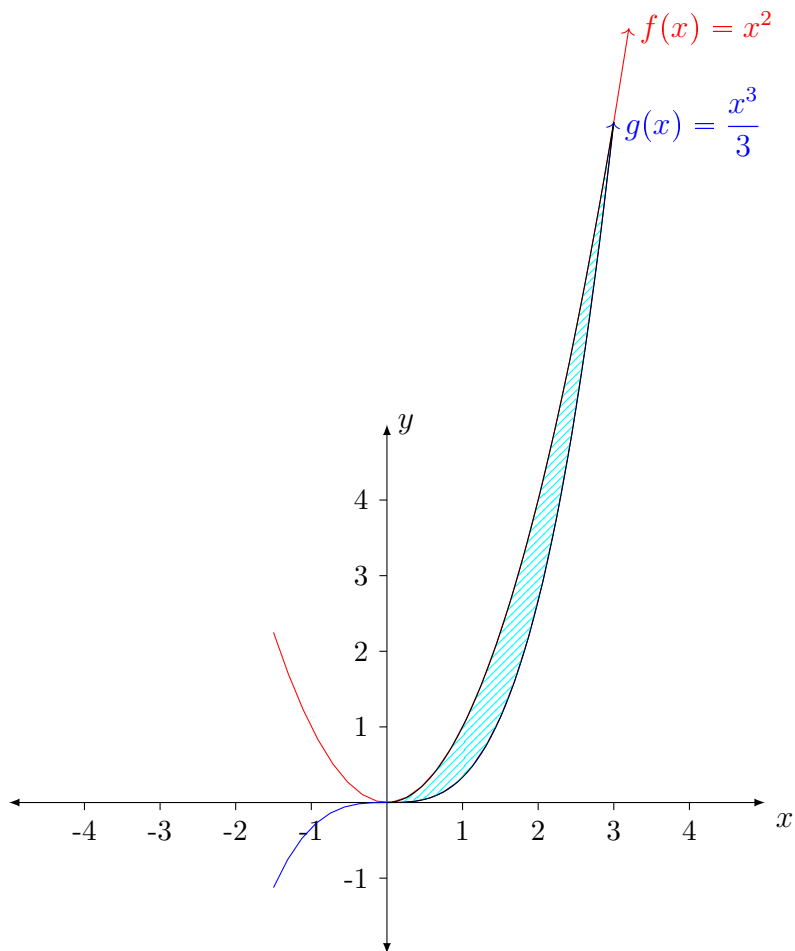


$$A = \int_0^2 \frac{1}{4}x^2 dx = \left[\frac{1}{12}x^3 \right]_0^2 = \frac{2}{3}$$

- 3 Calcular el area limitada por las parabolas $y = x^2$, $y = \frac{x^3}{3}$.

Resolución

$$\text{Calculamos: } \begin{cases} y = x^2 \\ y = \frac{x^3}{3} \end{cases} \rightarrow \frac{x^3}{3} = x^2 \rightarrow x = 0, x = 3$$

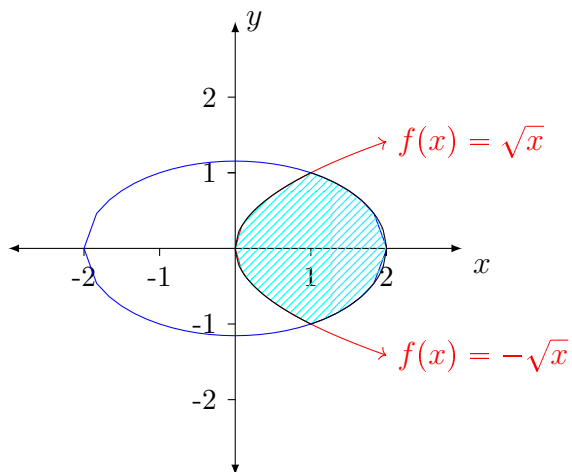


$$A = \int_0^3 \left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{12}\right]_0^3 = \frac{9}{4}$$

- 4 Encontrar el área de la región limitada por la parte interior de la parábola $y^2 = x$ y la elipse $x^2 + 3y^2 = 4$.

Resolución

$$\text{Resolviendo el sistema } \begin{cases} y^2 = x \\ x^2 + 3y^2 = 4 \end{cases},$$



se obtiene los puntos de intersección $P_1 = (1, 1)$ y $P_2 = (1, -1)$.

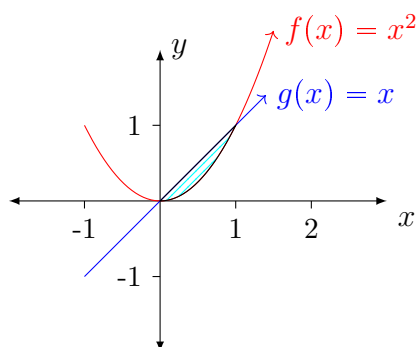
$$\begin{aligned}
 A &= \int_{-1}^1 (\sqrt{4-3y^2} - y^2) dy \\
 &= \sqrt{3} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{4}{3} - y^2} dy - \int_{-1}^1 y^2 dy \\
 &= \frac{3 + 4\pi\sqrt{3}}{9}
 \end{aligned}$$

Ejercicios Propuestos

- 1 En los ejercicios del 1 al 31, encontrar el área de las regiones comprendidas entre las curvas dadas, mostrando gráficamente la región y el elemento de área:

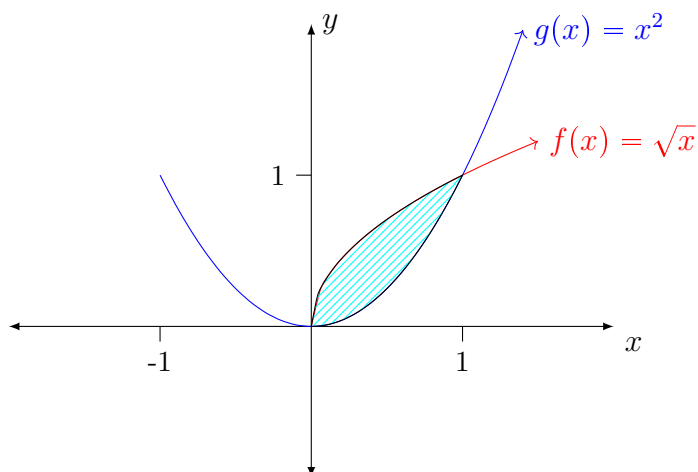
1 $y = x^2$, $y = x$

Resolución



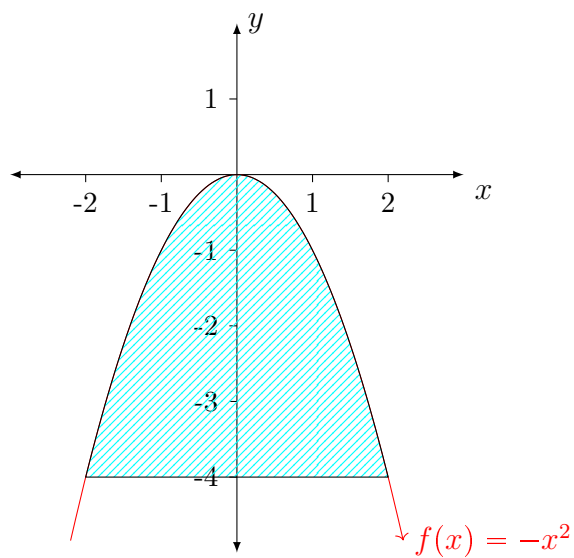
2 $y = \sqrt{x}$, $y = x^2$

Resolución



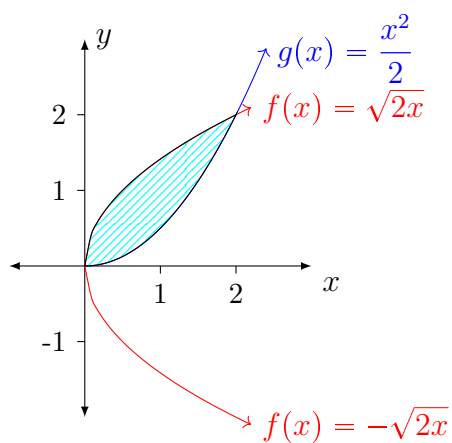
3 $y = -x^2$, $y = -4$

Resolución



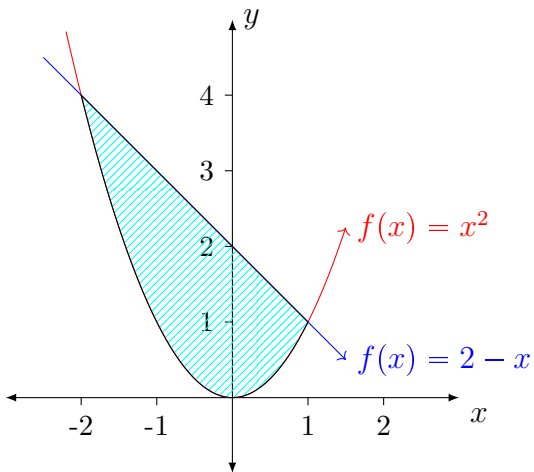
4 $ax = y^2$, $ay = x^2$

Resolución



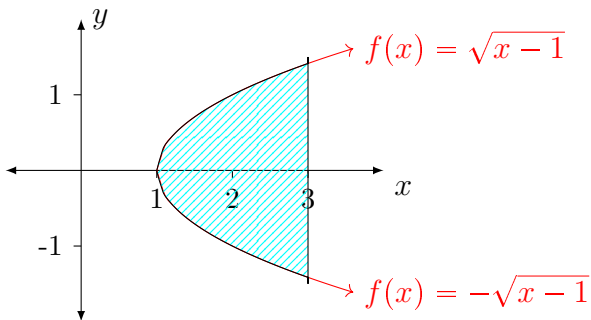
5 $y = x^2$, $y + x = 2$

Resolución



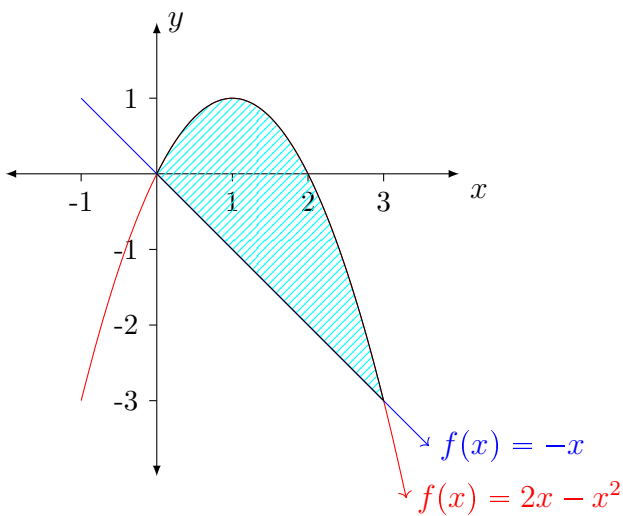
6 $x - 1 = y^2$, $x = 3$

Resolución



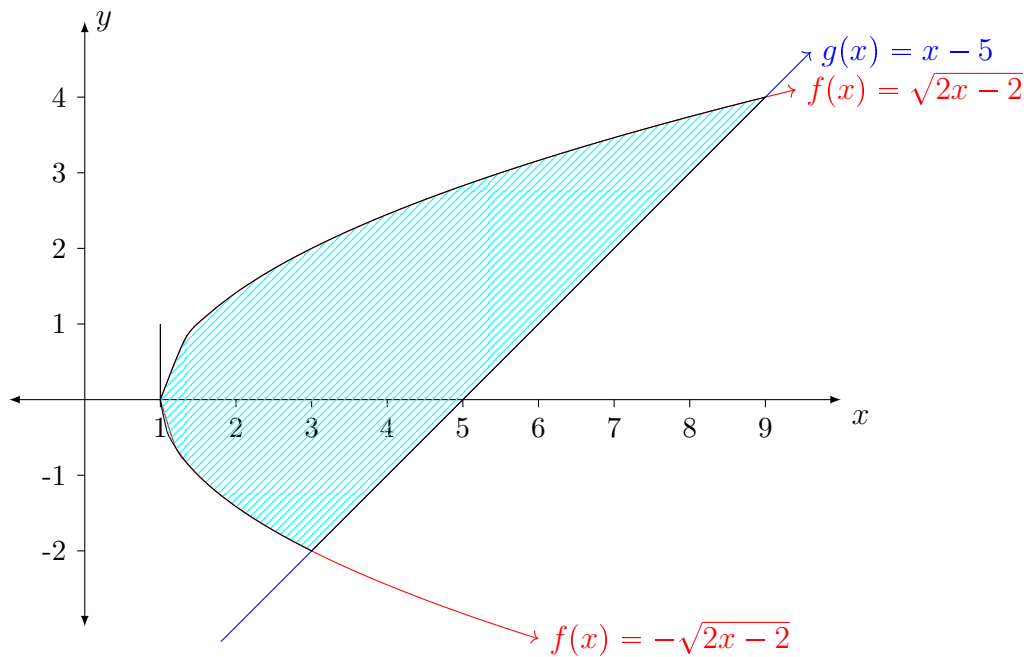
7 $y = 2x - x^2$, $y + x = 0$

Resolución



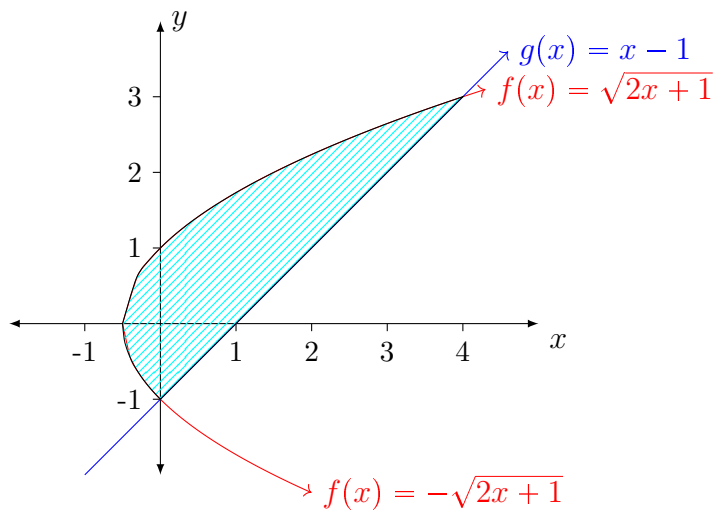
8 $2x - 2 = y^2$, $y = x - 5$

Resolución



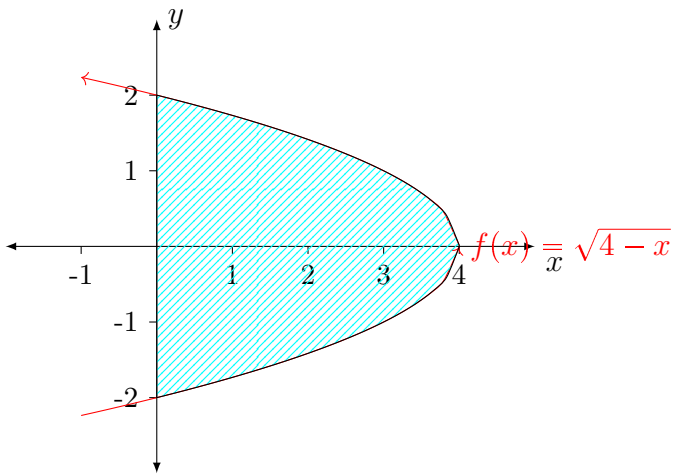
9 $y^2 = 2x + 1$, $x - y = 1$

Resolución



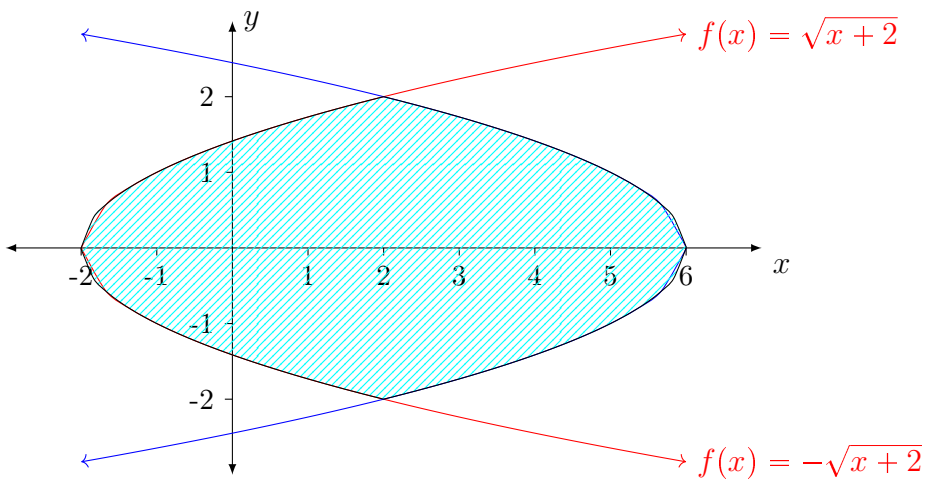
10 $x = 4 - y^2$, i el eje y

Resolución



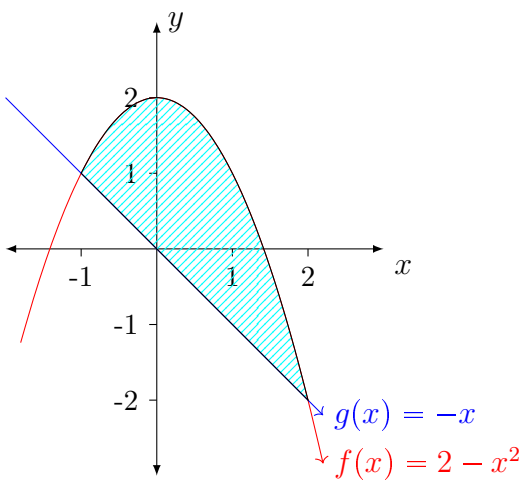
11 $x = y^2 - 2$, $x = 6 - y^2$

Resolución



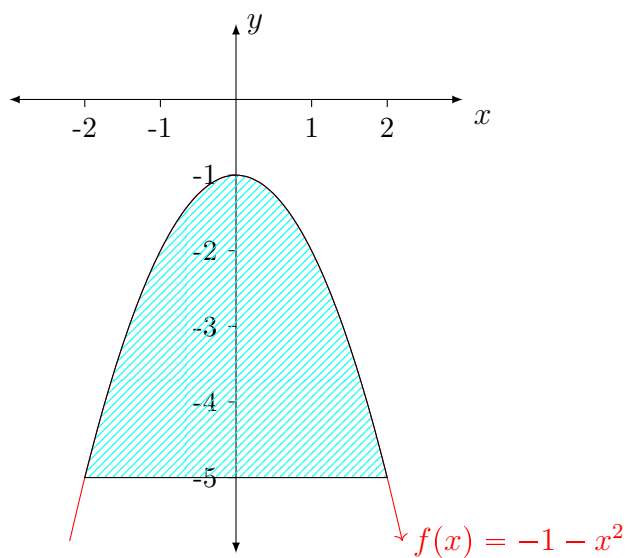
12 $y = 2 - x^2$, $y = -x$

Resolución



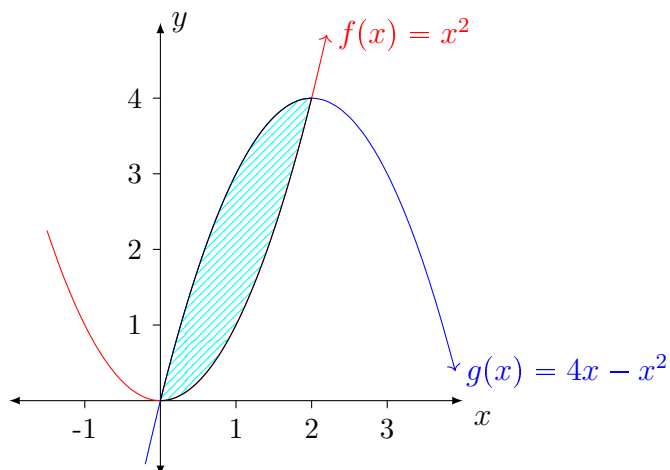
13 $x^2 + y + 1 = 0$, $y = -5$

Resolución



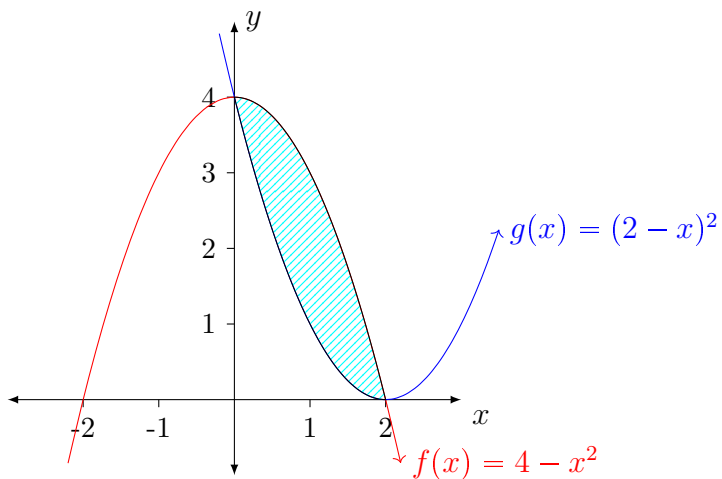
14 $y = x^2$, $y = -x^2 + 4x$

Resolución



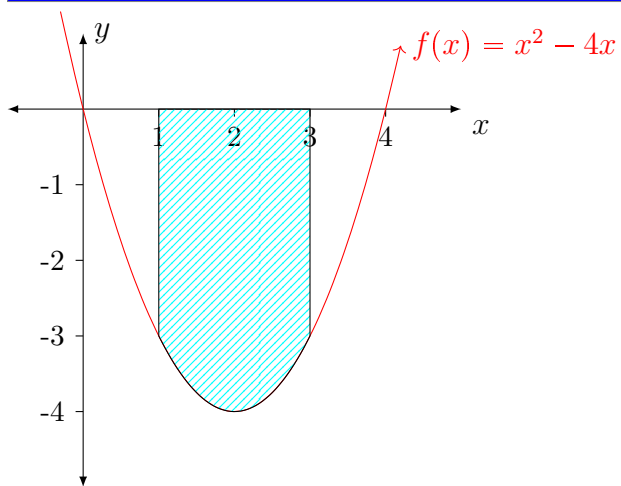
15 $y = 4 - x^2$, $y = (2 - x)^2$

Resolución



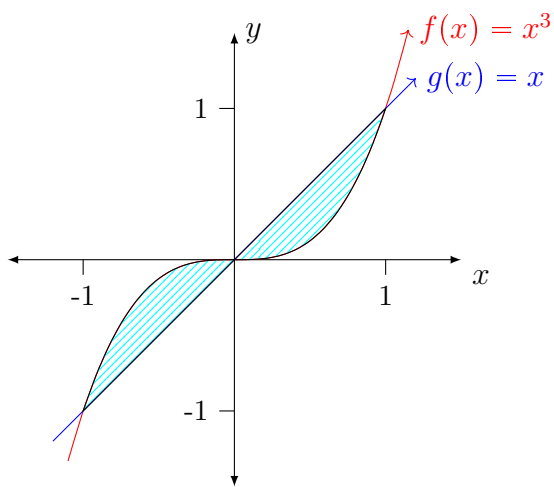
16 $y = x^2 - 4x$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 3$

Resolución



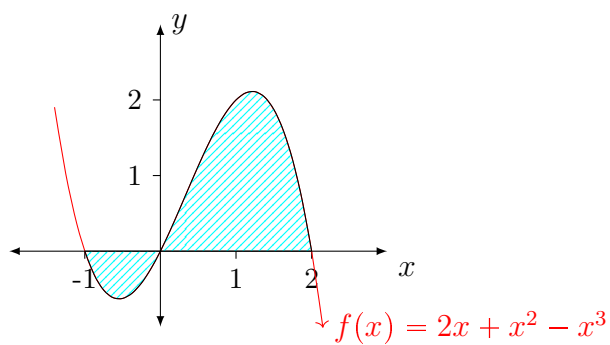
17 $y = x^3$, $y = x$

Resolución



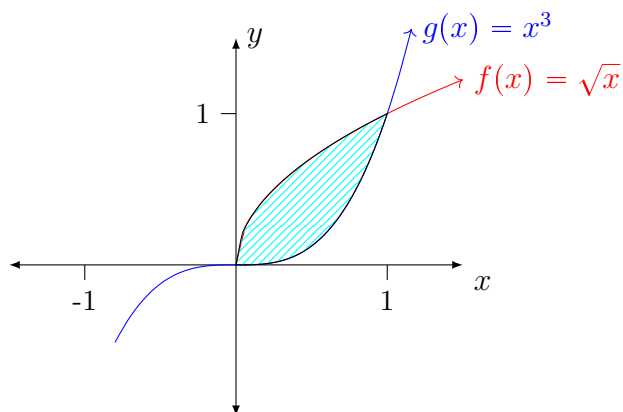
18 $y = 2x + x^2 - x^3$, i el eje x

Resolución



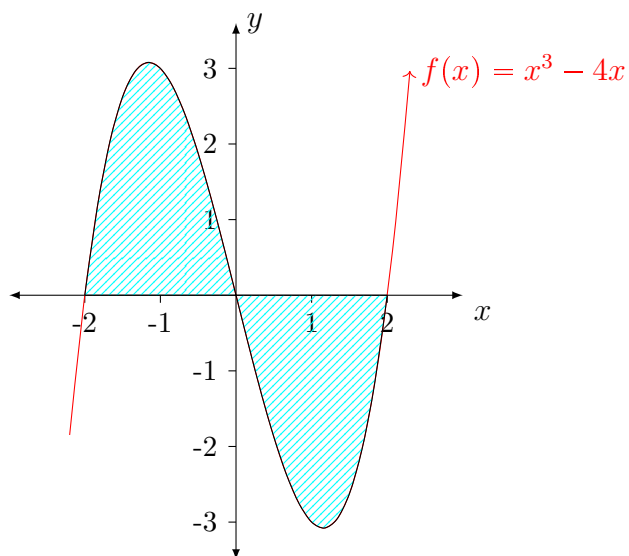
19 $y = \sqrt{x}$, $y = x^3$

Resolución



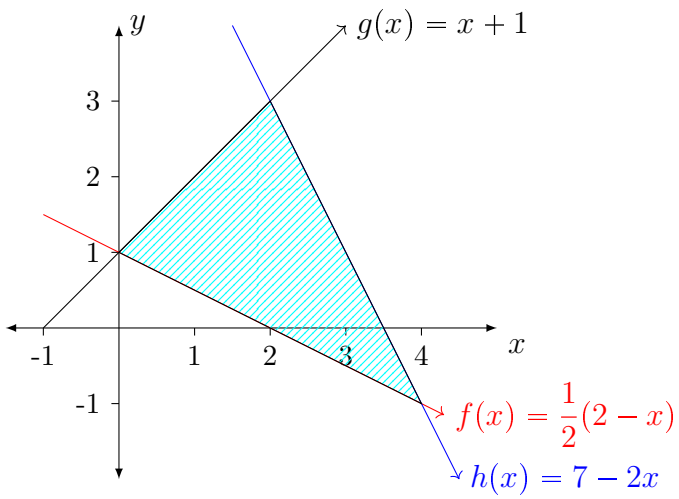
20 $y = x^3 - 4x$, i el eje x

Resolución



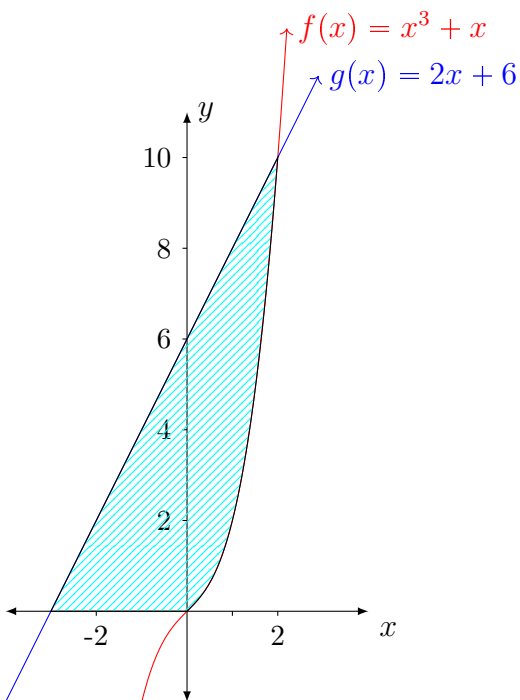
21 $x + 2y = 2$, $y = x + 1$, $2x + y = 7$

Resolución



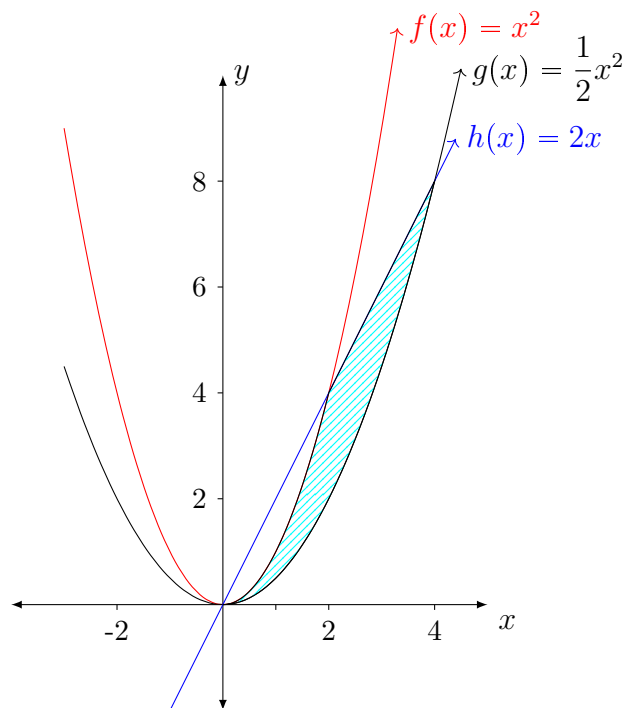
22 $y = x^3 + x$, $y = 2x + 6$, $y = 0$

Resolución



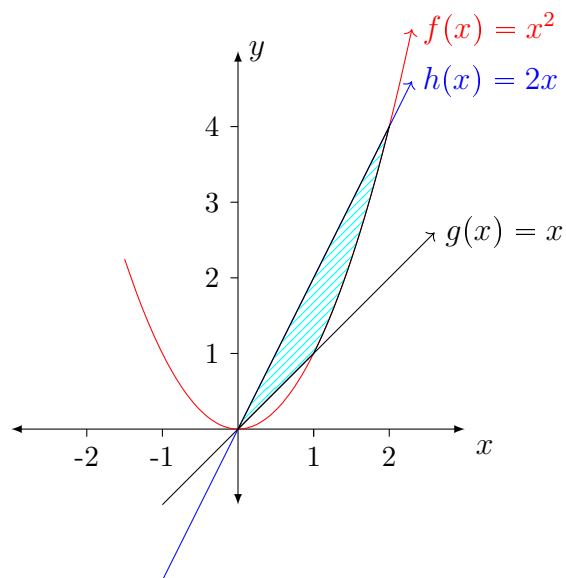
23 $y = x^2$, $y = \frac{1}{2}x^2$, $y = 2x$

Resolución



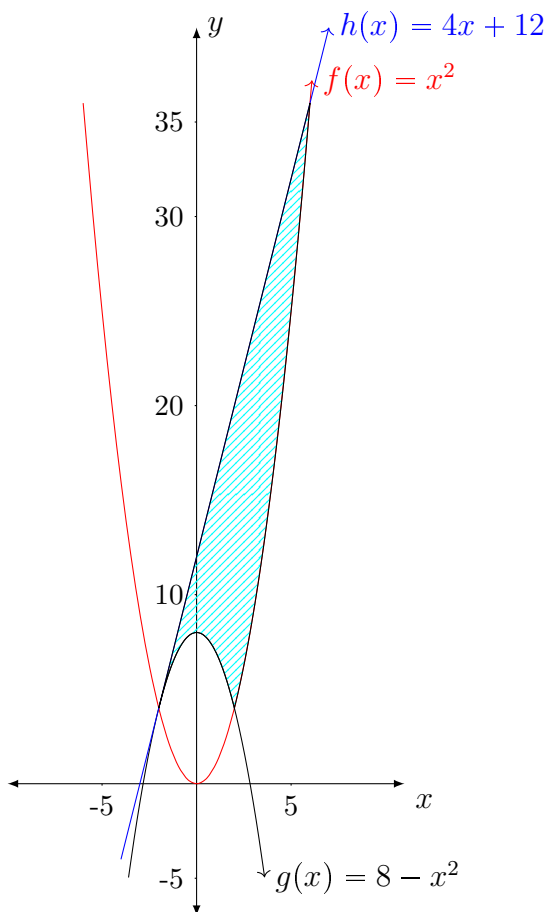
24 $y = x^2$, $y = x$, $y = 2x$

Resolución



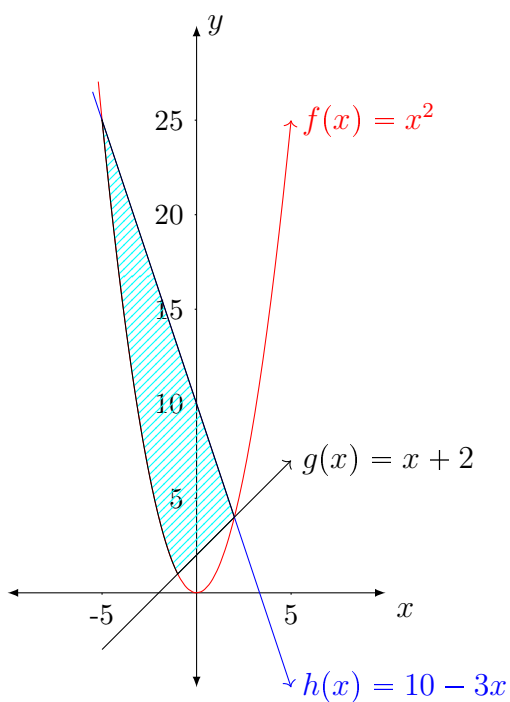
25 $y = x^2$, $y = 8 - x^2$, $y = 4x + 12$

Resolución



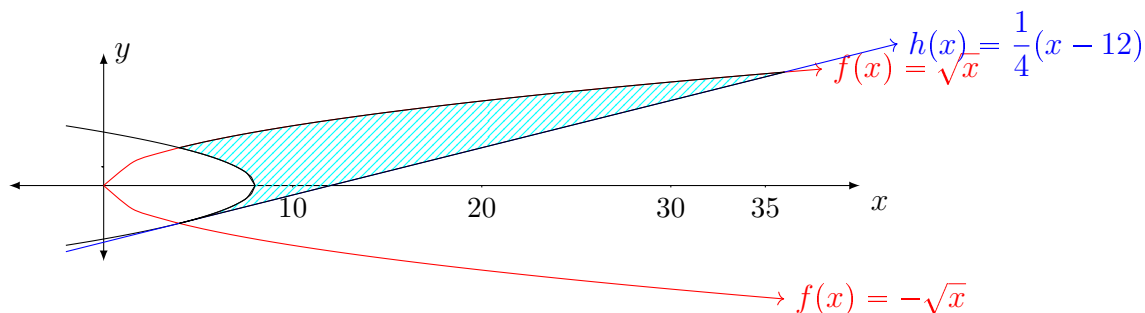
26 $y = x^2$, $y = x + 2$, $y = 10 - 3x$

Resolución



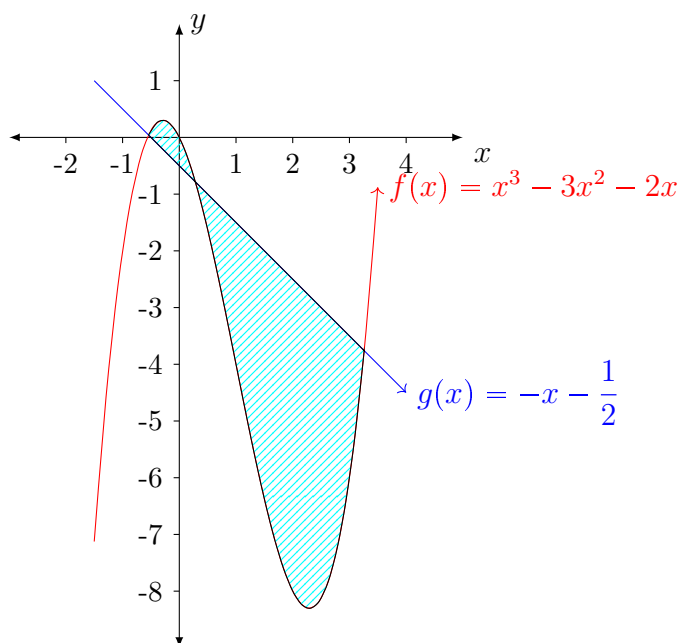
27 $x = y^2$, $x = 8 - y^2$, $4y - x + 12 = 0$

Resolución



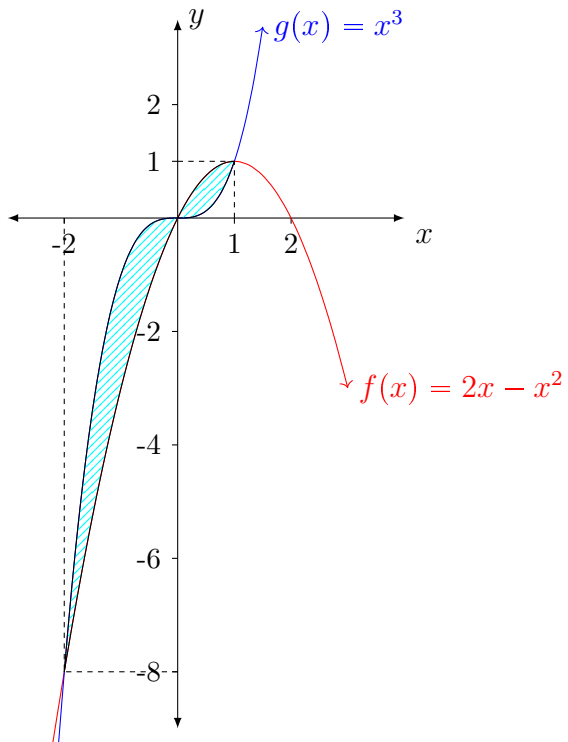
28 $y = x^3 - 3x^2 - 2x$, $y = -x - \frac{1}{2}$

Resolución



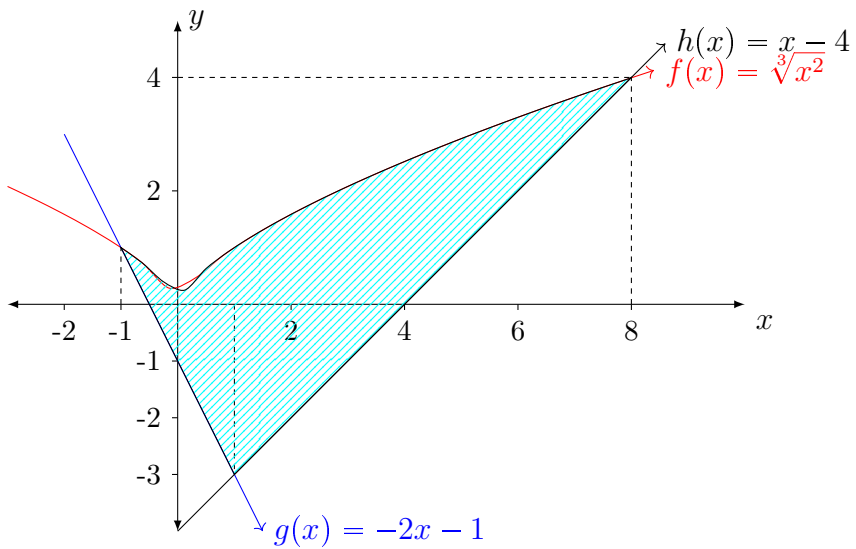
29 $y = 2x - x^2$, $y = x^3$

Resolución



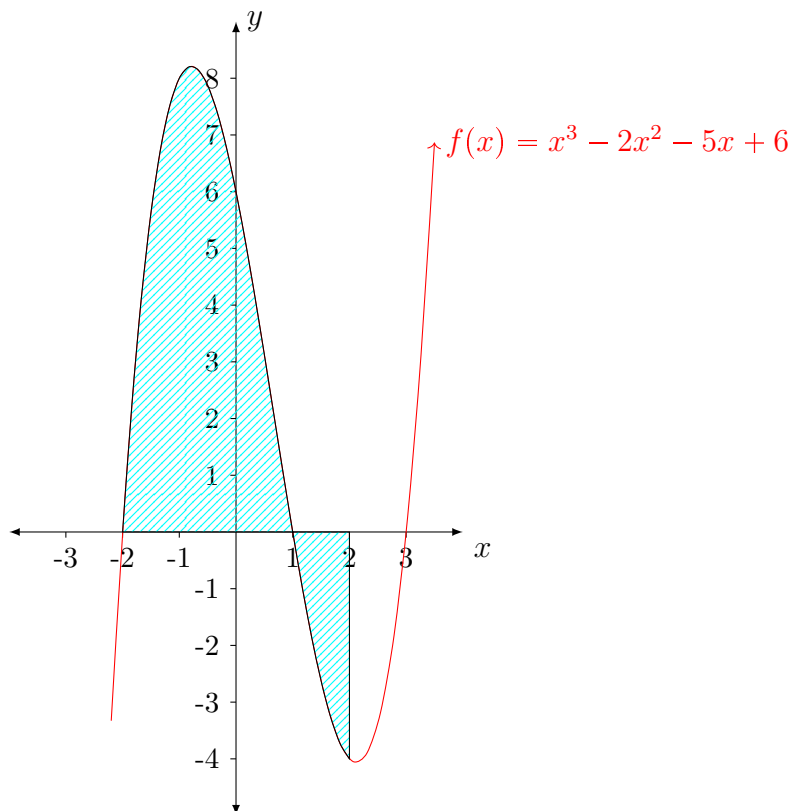
30 $y^3 = x^2$, $2x + y = -1$, $x - y = 4$

Resolución



31 $y = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$, $y = 0$, $x = -2$, $x = 2$

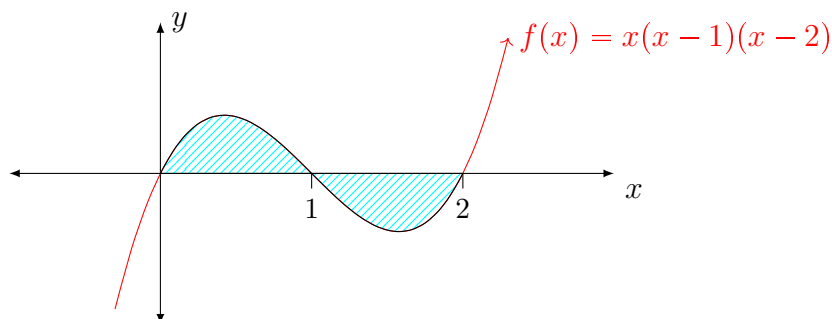
Resolución



II En los ejercicios del 1 al 12, determinar el área de la región encerrada por las curvas dadas:

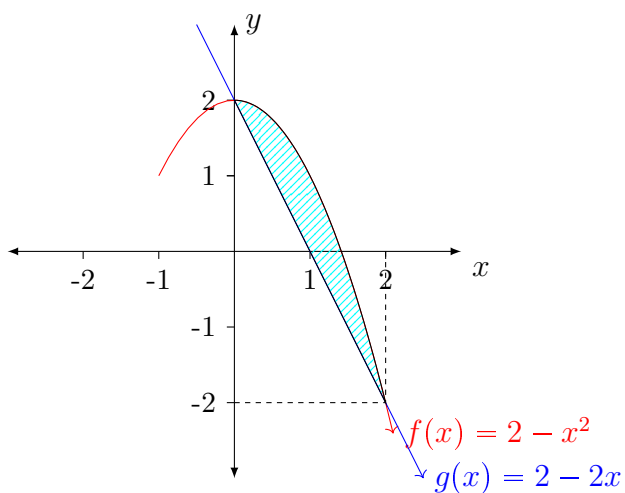
1 Hallar el área de la figura limitada por la curva $y = x(x - 1)(x - 2)$ i el eje X

Resolución



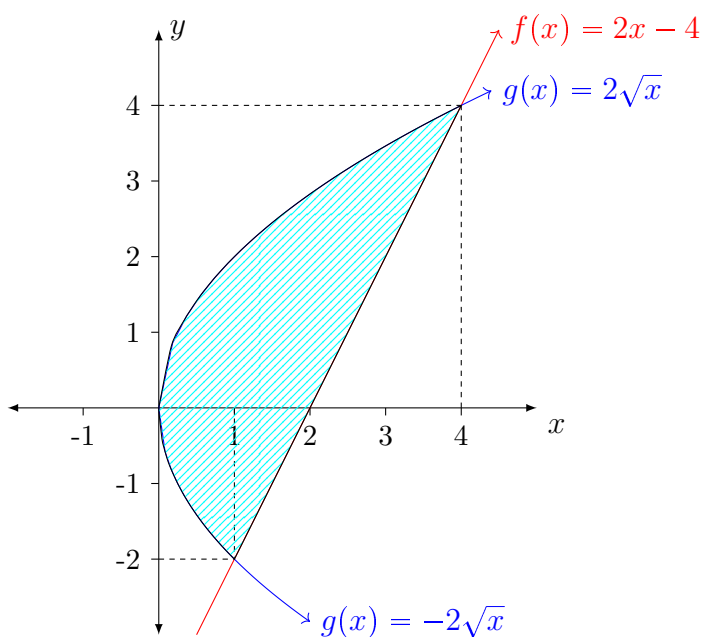
2 Hallar el área de la región limitada por las curvas $y = 2 - x^2$, $y = 2 - 2x$.

Resolución



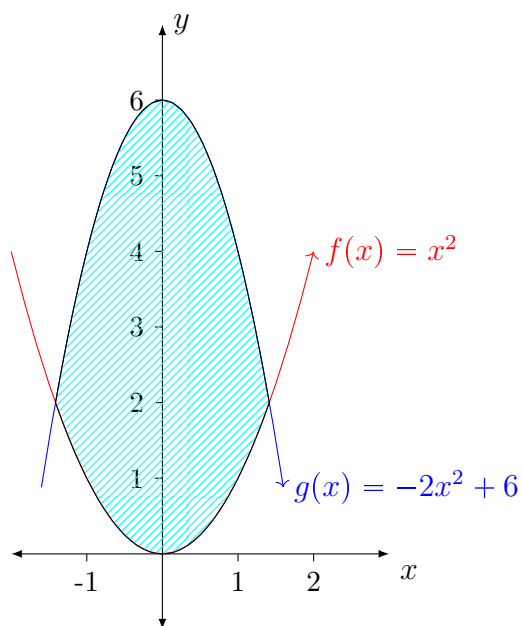
- 3 Hallar el área de la región limitada por las curvas $y^2 = 4x$, $2x - y = 4$.

Resolución



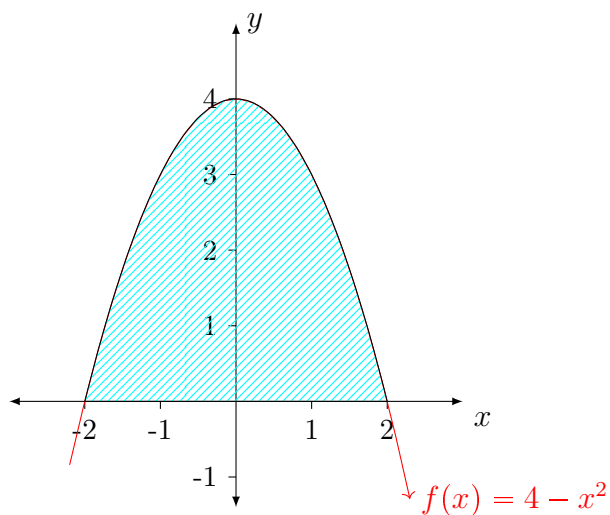
- 4 Hallar el área de la región limitada por las curvas $y = x^2$, $y = -2x^2 + 6$.

Resolución



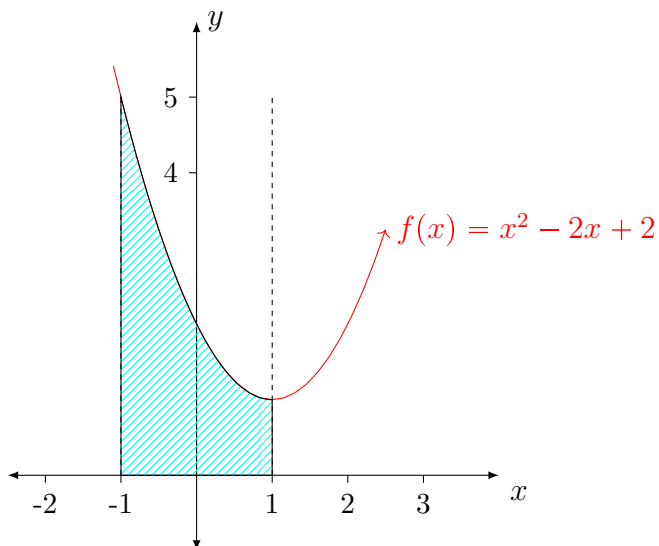
- 5 Hallar el área de la región limitada por las curvas $y = 4 - x^2$, eje X

Resolución



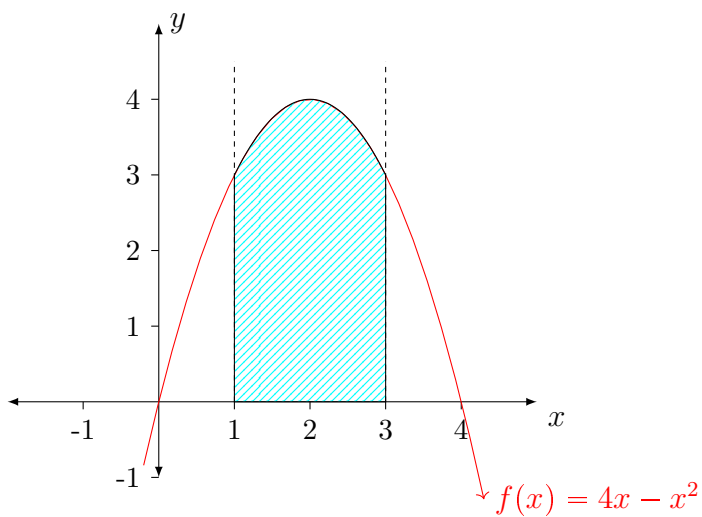
- 6 Hallar el área de la región limitada por las curvas $y = x^2 - 2x + 2$, eje X, $x = -1$, $x = 1$

Resolución



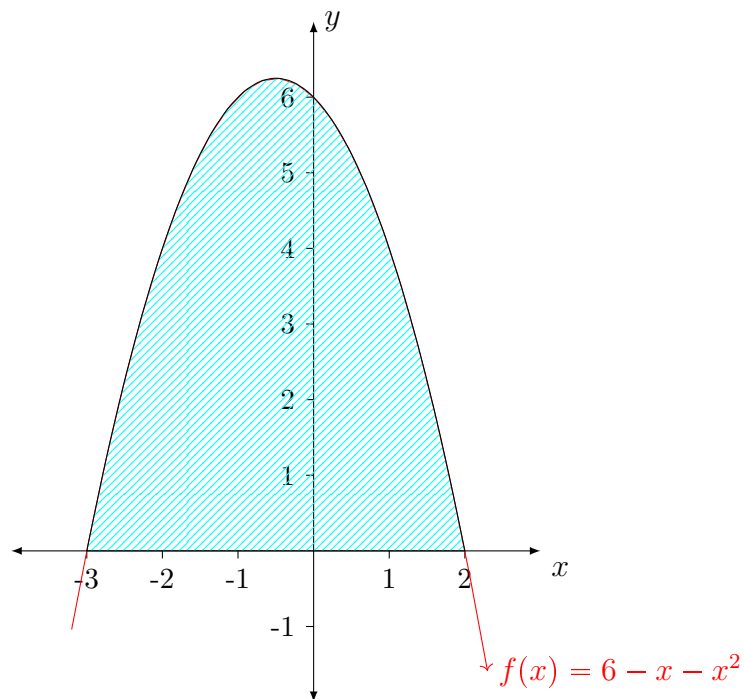
- 7 Hallar el área de la región limitada por las curvas $y = 4x - x^2$, eje X, $x = 1$, $x = 3$

Resolución



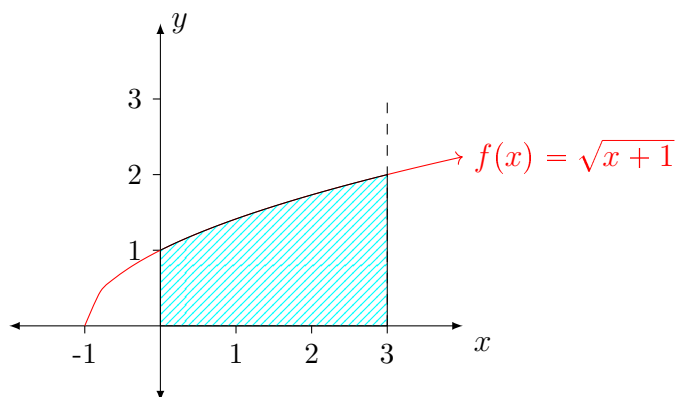
- 8 Hallar el área de la región limitada por las curvas $y = 6 - x - x^2$, eje X

Resolución



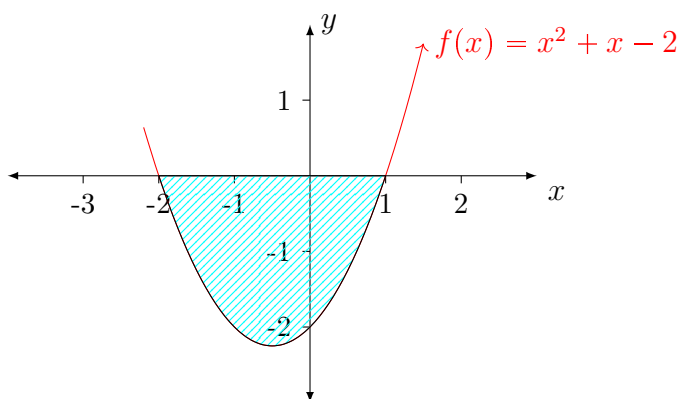
- 9 Hallar el área de la región limitada por las curvas $y = \sqrt{x+1}$, eje X, eje Y, $x = 3$

Resolución



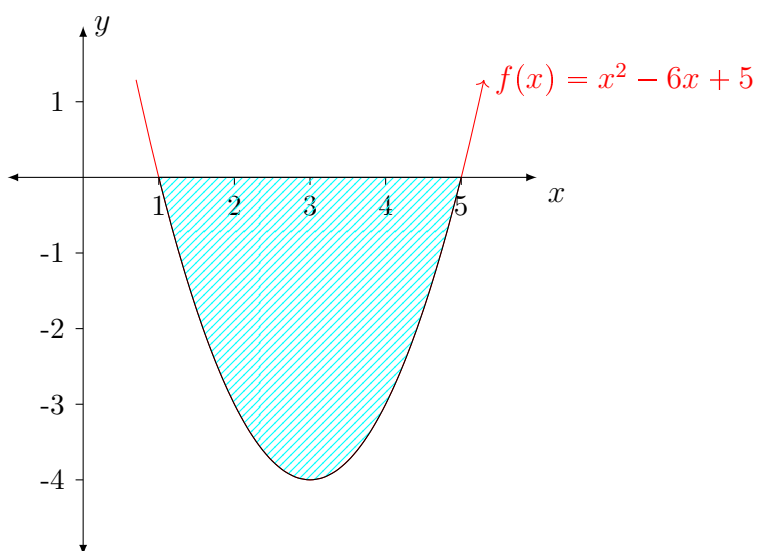
- 10 Hallar el área de la región limitada por las curvas $y = x^2 + x - 2$, eje X

Resolución



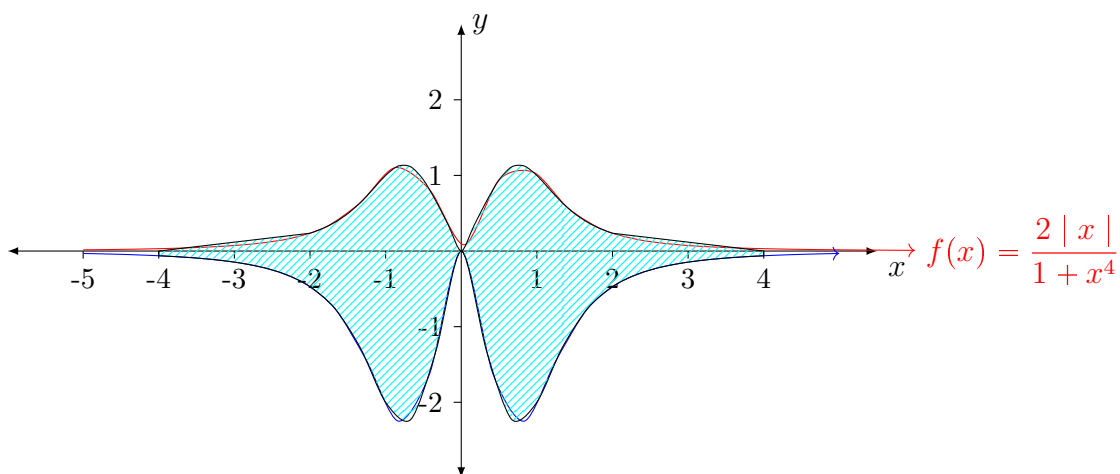
- 11 Hallar el área de la región limitada por las curvas $y = x^2 - 6x + 5$, eje X

Resolución



- 12 $f(x) = \frac{2|x|}{1+x^4}$, $g(x) = \frac{-4|x|}{1+x^4}$

Resolución



Rta. $3\pi u^2$

III Resolver los siguientes problemas diversos

- 1 Hallar el área de la región limitada por las curvas $x^2 = -y$, $y = -4$
- 2 Calcular el área encerrada por la elipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$.
- 3 Calcular el área encerrada por las curvas $f(x) = x^3 - x$ y $g(x) = x^2$.
- 4 Obtener el área de la región comprendida por $y = -x^2 + 4x - 3$ y sus rectas tangentes en los puntos $(0, -3)$, $(4, -3)$.
- 5 Calcular el área de la región encerrada por la parábola $y^2 = 4x$ y su cuerda que pasa por los puntos $(l, -2)$, $(4, 4)$
- 6 Determinar el valor del área de la región comprendida por $x = 3 - y^2$ y su normal en el punto $(2, 1)$.
- 7 Calcular el área de la región comprendida entre las curvas $x = y^2 - 2y - 2$ y $x = -2y^2 + y + 4$.
- 8 Determinar el valor del área de la región limitada por las curvas $y = \sin x$, $y = \cos x$ y el eje Y y el primer punto en donde se intersectan estas curvas, para $x > 0$.
- 9 Calcular el área de la región comprendida por la gráfica de $y = \ln x$ y las rectas $x = \frac{1}{2}$, $x = 6$.
- 10 Obtener el valor del área limitada por la gráfica de $y = x \ln x$ y las rectas $y = 0$, $x = 2$.
- 11 Calcular el área de la región comprendida por la curva $y = \arcsen x$ y las rectas $y = 0$, $x = \sqrt{12}$

4.4. Aplicación a volúmenes de sólidos de revolución

Como otra aplicación de las integrales definidas presentamos la determinación de volúmenes de ciertos sólidos llamados “sólidos de revolución”. Tales sólidos se generan cuando una región plana se hace girar al rededor de una recta situado en el plano de la región. Esta recta recibe el nombre de “eje de revolución”.

Consideremos una región limitada por una curva continua $y = f(x)$ con la condición de que $f(x) \geq 0$ sobre el intervalo $[a, b]$. Tal región se muestra en la figura 4.3.

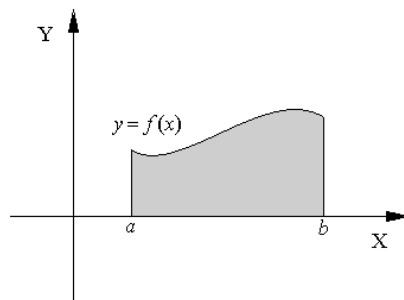


Figura 4.3: Región bajo la curva $y = f(x)$

Al hacer rotar esta región alrededor del eje X se obtiene un solido de revolución tal como se muestra en al figura4.4.

El volumen del solido de revolución de la figura 4.4, se calcula mediante la formula

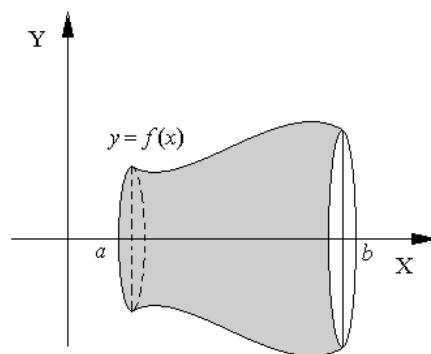


Figura 4.4: Sólido de revolución

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx \quad (4.1)$$

En ese caso de que la región esté acotada por dos curvas continuas: $f(x)$ y $g(x)$, y las rectas $x = a$ y $x = b$ tal que $g(x) \leq f(x)$ para $x \in [a, b]$ (ver figura 4.5), entonces al rotar

alrededor del eje X la región acotada se genera un “sólido hueco” como se muestra en la figura 4.6.

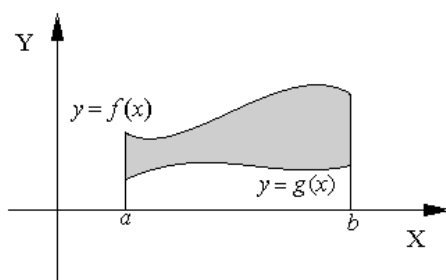


Figura 4.5: Región acotada

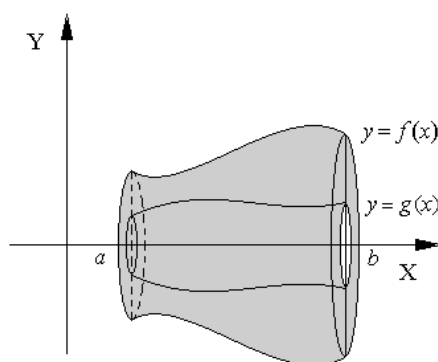


Figura 4.6: Sólido hueco

El solido hueco de la figura 4.6, se calcula con la formula

$$V = \pi \int_a^b ([f(x)]^2 - [g(x)]^2) dx \quad (4.2)$$

Cuando una región plana gira alrededor del eje Y, el volumen del solido de revolución resultante, por medio de consideraciones similares a las anteriores se obtiene respectivamente por las expresiones siguientes:

$$V = \pi \int_c^d [f(y)]^2 dy \quad (4.3)$$

$$V = \pi \int_c^d ([f(y)]^2 - [g(y)]^2) dy \quad (4.4)$$

Ejercicios Resueltos

- 1 Encontrar el volumen del solido que resulta de hacer girar la región limitada por las curvas $y = x^3 + 1, y = 0, x = 0, x = 1$; alrededor del eje X.

Resolución

Graficamos la región limitada por las curvas $y = x^3, y = 0, x = 0, x = 2$

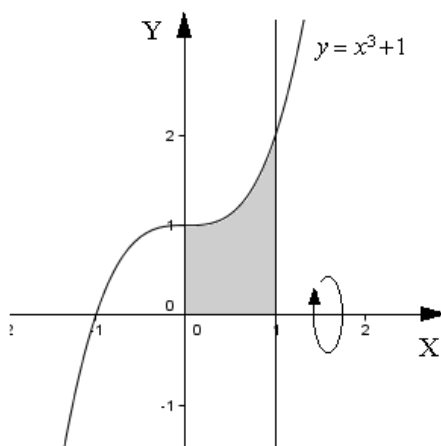


Figura 4.7:

- 2 Hallar el volumen del solido que se obtiene al girar alrededor del eje X, la región acotada por las parábolas $y - 1 = \frac{1}{4}(x - 2)^2, y - 4 = -\frac{1}{6}(x - 2)^2$ y las rectas $x = 1, x = 3$.
- 3 Calcular el volumen del solido generado por la región limitada por las curvas $y^2 = x, x = 0, x = 4$ cuando rota al eje Y.

Ejercicios Propuestos

Calcular el volumen del solido que resulta de hacer girar, alrededor del eje X, la region limitada por las curvas dadas y trazar el solido correspondiente

- 1 $x + y = 2, x = 0, y = 0$ $8\pi/3$
- 2 $y = x^2, x = 2, y = 0$ $32\pi/5$
- 3 $y = x - x^2, y = 0$ $\pi/30$
- 4 $y = x^2 - x, y = 0$ $\pi/30$

-
- 5 $y = 2x^2, x = 2, y = 0$ $132\pi/5$
- 6 $y = 3x - x^2, y = x$ $56\pi/15$
- 7 $y^2 = x, y = x^2$ $3\pi/10$
- 8 $y = x^2 + 1, y = x + 3$ $117\pi/5$
- 9 $y = \sqrt{4+x}, x = 0, y = 0$ 8π
- 10 $y = x^3, y = 0, x = 2$ $128\pi/7$
- 11 $y = \frac{1}{x}, x = 1, x = 3, y = 0$ $2\pi/3$
- 12 $y = (x - 1)^3, y = 0, x = -1, x = 2$ $129\pi/7$
- 13 $2y^2 = x^3, y = 0, x = 2$ 2π
- 14 $x^2 - xy + y^2 = a^2$ $8\pi/3$
- 15 $y = b\left(\frac{x}{a}\right)^2, y = b\left|\frac{x}{a}\right|$ $4\pi ab^2/15$
- 16 $y = b\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3}, 0 \leq x \leq a$ $3\pi ab^2/7$
- 17 $y = \text{sen } x, x = 0, x = \pi, y = 0$ $\pi^2/2$
- 18 $y = \cos x, x = 0, x = \frac{\pi}{4}, y = 0$ $\pi^2/8 + \pi/4$
- 19 $y = e^{-x}, y = 0, x = 0, x = 5$ $\pi(1 - e^{-10})/2$
- 20 $y = xe^x, y = 0, x = 1$ $\pi(e^2 - 1)/4$

Hallar el volumen del solido gnerado al hacer girar, alrededor del eje Y, la region acotada por las curvas dadas

- 1 $y = 2x^2, x = 2, y = 0$ 16π
- 2 $y = x^2, y = 4$ 8π
- 3 $y = 6x - x^2, y = 0$ 216π
- 4 $y = x^2, y = 2x - 1, y = x + 2$ $7\pi/2$
- 5 $y = x^2 + 1, y = 1, y = 5$ 8π
- 6 $y = x^3, y = 0, x = 2$ $64\pi/5$
-

4.5. Aplicación a Longitud de arco

Se presentan dos casos: CASO I: Sea f una función con derivada continua en $[a, b]$, entonces la longitud del arco de la curva $y = f(x)$ desde el punto donde cuya abscisa es a hasta el punto cuya abscisa es b es expresado por la formula

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

CASO II: Sea g una función con derivada continua en $[c, d]$, entonces la longitud del arco de la curva $x = g(y)$ desde el punto donde cuya ordenada es c hasta el punto cuya ordenada es d es expresado por la formula

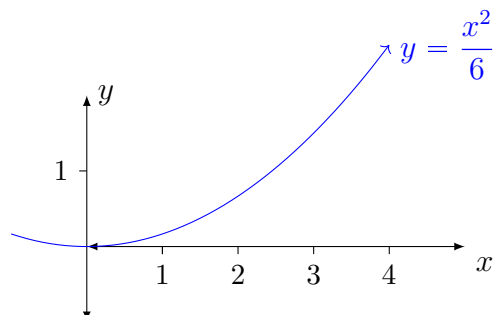
$$L = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} \cdot dy$$

Ejercicios Resueltos

- 1 Hallar la longitud del arco de la parábola $6y = x^2$ desde el origen de coordenadas hasta el punto $(4, \frac{8}{3})$.

Resolución

Como $6y = x^2$, entonces $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{3}$. La longitud de arco que se muestra en la figura.



$$\begin{aligned}
L &= \int_0^4 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \\
&= \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{x^2}{9}} dx \\
&= \frac{1}{3} \int_0^4 \sqrt{9 + x^2} dx \\
&= \frac{1}{3} \left[\frac{x}{2} \sqrt{9 + x^2} + \frac{9}{2} \ln |x + \sqrt{9 + x^2}| \right]_0^4 \\
&= \frac{1}{3} \left(10 + \frac{9}{2} \ln 3 \right) u
\end{aligned}$$

- 2 Encontrar la longitud de la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$

Resolución

La circunferencia $x^2 + y^2 = 9$ es la unión de los arcos $y = \sqrt{9 - x^2}$ y $y = -\sqrt{9 - x^2}$, que la longitud de ambos arcos son iguales, luego la longitud de la circunferencia sera dos veces la longitud del arcos $y = \sqrt{9 - x^2}$ de $(-3, 0)$ hasta $(3, 0)$.

Como $y = \sqrt{9 - x^2}$, entonces $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{9 - x^2}}$. Luego la longitud de la circunferencia es

$$\begin{aligned}
L &= 2 \int_{-3}^3 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \\
&= 2 \int_{-3}^3 \sqrt{1 + \frac{x^2}{9 - x^2}} dx \\
&= 6 \int_{-3}^3 \frac{dx}{\sqrt{9 - x^2}} \\
&= 6 \left[\text{arc sen} \frac{x}{3} \right]_{-3}^3 \\
&= 6 [\text{arc sen}(1) - \text{arc sen}(-1)] \\
&= 6 \left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) \right] = 6\pi u
\end{aligned}$$

- 3 Calcular la longitud del arco de la parábola semicúbica $y^2 = x^3$ desde el origen de coordenadas hasta el punto $(4, 8)$.

Resolución

Como $y^2 = x^3$ entonces $y = x^{3/2} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$. Luego la longitud de arco de la curva, es:

$$L = \int_0^4 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9x}{4}} = \frac{8}{27} (10\sqrt{10} - 1) u$$

4 Hallar la longitud total de la hipocicloide $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$

Resolución

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3} \rightarrow x = (a^{2/3} - y^{2/3})^{3/2}$$

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{\sqrt{a^{2/3} - y^{2/3}}}{y^{1/3}}$$

Dada la simetría de la hipocicloide, se tiene que la longitud de la curva esta dada por

$$\begin{aligned} L &= 4 \int_0^a \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy \\ &= 4 \int_0^a \sqrt{1 + \frac{a^{2/3} - y^{2/3}}{y^{2/3}}} dy \\ &= 4 \int_0^a \frac{a^{1/3}}{y^{1/3}} dy = 6au \end{aligned}$$

Ejercicios Propuestos

- 1 Hallar la longitud del arco de la curva $y^2 = 4x - x^2$, comprendido entre los dos puntos que corta al eje X. $2\pi u$

- 2 Hallar la longitud del arco de la curva $y = \ln x$ desde $x = \sqrt{3}$ hasta $x = \sqrt{8}$.
 $(1 + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2})u$

- 3 Hallar la longitud del arco de la parábola semicúbica $5y^3 = x^2$ comprendida dentro de la circunferencia $x^2 + y^2 = 6$. $\frac{134}{27}u$

- 4 Encontrar la longitud del arco de la parábola $y^2 = 4px$ desde el vertice hasta un extremo del lado recto. $[\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})]pu$

- 5 Hallar la longitud de la curva $y = \ln(1 - x^2)$ desde $x = \frac{1}{4}$ a $x = \frac{3}{4}$ $(\ln \frac{21}{5} - \frac{1}{2})u$

- 6 Encuentre la longitud del arco de la curva $9y^2 = 4x^3$ desde el origen al punto $(3, 2\sqrt{3})$. $\frac{14}{3}u$

- 7 Hallar la longitud del arco de la curva cuya ecuación $y^3 = x^2$, comprendida entre los puntos $(0, 0)$ y $(8, 4)$. $\frac{8}{37}(10\sqrt{10} - 1)u$

- 8 Hallar la longitud total del lazo de la curva $6y^2 = x(x-2)^2$, si $x \in [0, 2]$. $\frac{8}{3}\sqrt{3}u$

- 9 Calcular la longitud de la curva $8y^2 = x^2(1 - x^2)$. $\sqrt{2}\pi u$

- 10 Calcular la longitud total del arco de parábola $y = 2\sqrt{x}$ desde $x = 0$ hasta $x = 1$.
 $[\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})]u$

- 11 Hallar la longitud del arco de la curva $x = \frac{y^2}{2} - \frac{1}{2} \ln y$ desde $y = 1$ hasta $y = e$.
 $\frac{e^2 + 1}{4}u$

- 12 Hallar la longitud del arco de la curva cuya ecuación es $y = \frac{x^2}{6} + \frac{1}{2x}$ desde el punto de abscisa $x = 1$ al punto de abscisa $x = 3$. $\frac{14}{3}u$

4.6. Aplicación a área de una superficie de revolución

Se presenta dos casos:

CASO I: El área de una superficie S obtenida por la rotación alrededor del eje X (Ver figura 4.8), del arco de la curva $y = f(x)$ entre los puntos $x = a$ y $x = b$ esta definida mediante la formula

$$A(S) = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

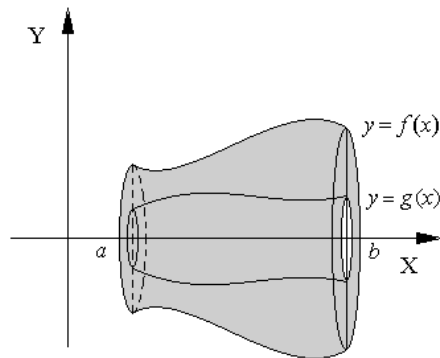


Figura 4.8: Superficie de revolución de $y = f(x)$, $x \in [a, b]$ alrededor del eje X

CASO II: El área de una superficie S obtenida por la rotación alrededor del eje Y , el arco de la curva $x = g(y)$ entre los puntos $y = c$ y $y = d$ esta definida mediante la formula

$$A(S) = 2\pi \int_c^d x \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy$$

Ejercicios Resueltos

- 1 Hallar el área de la superficie del “Huso”, que resulta al girar una semi-onda de la senoide $y = \text{sen } x$ alrededor del eje X.

Resolución

$$y = \text{sen } x \rightarrow \frac{dy}{dx} = \cos x$$

Se tiene que el área de la superficie engendrada por la curva $y = \text{sen } x$, esta dado por:

$$\begin{aligned} A(S) &= 2\pi \int_0^{\pi} y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \\ &= 2\pi \int_0^{\pi} \sqrt{1 + \cos^2 x} \text{sen } x dx \\ &= -2\pi \left(\frac{\cos x}{2} \sqrt{\cos^2 x + 1} + \frac{1}{2} \ln |\cos x + \sqrt{\cos^2 x + 1}| \right) \Big|_0^{\pi} \\ &= \left(2\sqrt{2} - \ln \left| \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} \right| \right) \pi u^2 \end{aligned}$$

- 2 Hallar el área de la superficie engendrada al rotar alrededor del eje Y, la hipocicloide $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

Resolución

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3} \rightarrow \frac{dy}{dx} = -\sqrt[3]{\frac{y}{x}} \rightarrow \frac{dx}{dy} = -\sqrt[3]{\frac{x}{y}}$$

Luego, se tiene

$$\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = \frac{x^{2/3}}{y^{2/3}} = \frac{a^{2/3} - y^{2/3}}{y^{2/3}}$$

Si S_1 es la superficie engendrada por la mitad de la hipocicloide y dada la simetría de la hipocicloide, se tiene que el área de la superficie total S estará dado por

$$A(S) = 2A(S_1).$$

$$\begin{aligned} A(S_1) &= 2\pi \int_0^a x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \\ &= 2\pi \int_0^a (a^{2/3} - y^{2/3})^{3/2} \sqrt{1 + \frac{a^{2/3} - y^{2/3}}{y^{2/3}}} dx \\ &= 2\pi \int_0^a (a^{2/3} - y^{2/3})^{3/2} \frac{a^{1/3}}{y^{1/3}} dx \\ &= 2a^{1/3}\pi \int_0^a \frac{(a^{2/3} - y^{2/3})^{3/2}}{y^{1/3}} dx \\ &= 2a^{1/3}\pi \left(-\frac{3}{5}(a^{2/3} - y^{2/3}) \right) \Big|_0^a \\ &= \frac{6}{5}\pi a^2 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el área de la superficie S generada por la hipocicloide dada, esta dado por:

$$A(S) = 2A(S_1) = \frac{12}{5}\pi a^2 u^2$$

Ejercicios Propuestos

1 Hallar el área de la superficie generada haciendo girar la curva $y = 2\sqrt{6-x}$, $x \in [3, 6]$ alrededor del eje X. $\frac{56}{3}\pi u^2$

2 Hallar el área de la superficie del tronco engendrado por la rotación del círculo $x^2 + (y-b)^2 = a^2$, $b > a$ alrededor del eje X. $4ab\pi^2 u^2$

3 Hallar el área del elipsoide de revolución que se obtiene al hacer girar la elipse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ alrededor de:

a) Su eje mayor $2(16 + \frac{100}{3} \arcsen \frac{2}{3})\pi u^2$

b) Su eje menor $(50 + \frac{80}{3} \ln 4)\pi u^2$

4 Calcular el área de la superficie formada por la rotación alrededor del eje X del arco de la curva $4y = x^2 - 2 \ln x$ entre $x = 1$ y $x = 4$. $24\pi u^2$

5 Calcular el área de la superficie de revolución que se obtiene al rotar, alrededor del eje X, el lazo de la curva $9ay^2 = x(3a-x)^2$. $3a^2\pi u^2$

-
- 6 Hallar el area de la superficie de revolucion de la curva $x = \frac{y^2}{4} - \frac{1}{2} \ln y$ alrededor del eje OY, comprendida entre $y = 1$, $y = e$. $\frac{e^4 - 9}{16} \pi u^2$
- 7 Hallar el area de la superficie de revolucion que se obtiene al hacer girar al rededor del eje X, la curva $y^2 = 4ax$, desde $x = 0$ hasta $x = 3a$. $\frac{56}{3} a^2 \pi u^2$
- 8 Hallar el area de la superficie generada cuando la curva $y = \frac{2}{3} x^{3/2} - \frac{1}{2} x^{1/2}$, $x \in [0, 4]$ gira alrededor del eje X. $\frac{424\pi}{15} u^2$
- 9 Hallar el area de la superficie generada por la curva $y^2 - 2 \ln y = 4x$, al girar al rededor del eje X. $\frac{10\pi^2}{3} u^2$

Bibliografía

- [1] ARCE, A. (n.d.). *Introducción al análisis matemático I*.
- [2] BOSCH GIRAL, C., & GUERRA TEJADA, M. (1992). *Cálculo diferencial e integral* (8^a reimpresión). Publicaciones Cultural.
- [3] ESPINOZA RAMOS, E. (1998). *Análisis matemático II* (2^a ed.). Editorial Servicios Gráficos JJ.
- [4] ESPINOZA RAMOS, E. (2004). *Solucionario Deminovich II* (4^a ed.). Editorial Servicios Gráficos JJ.
- [5] FIGUEROA GARCÍA, R. (2011). *Análisis matemático II* (4^a ed.). Ediciones R.F.G.
- [6] LEITHOLD, L. (1998). *El cálculo*. Oxford University Press.
- [7] MITTAC MEZA, M., & TORO MOTA, L. (2000). *Tópicos de cálculo II*. Editorial THALES.
- [8] PITA RUIZ, C. (n.d.). *Análisis matemático II*
- [9] PURCELL, E. J., & VARBERG, D. (1993). *Cálculo diferencial e integral*. Prentice Hall Hispanoamericana.
- [10] VENERO, B. A. (1999). *Análisis matemático II*. Ediciones Gemar.
- [11] STEWART, J. (2001). *Cálculo de una variable: Trascendentes tempranas*. Prentice Hall.
- [12] LARSON, R., HOSTETLER, R. P., & EDWARDS, B. H. (1990). *Calculus* (4th ed.). D.C. Heath and Company.

-
- [13] EDWARDS, C. H., & PENNEY, D. E. (1996). *Cálculo con geometría analítica*. Prentice Hall.
- [14] MARSDEN, J. E., & TROMBA, A. J. (1998). *Cálculo vectorial*. Addison Wesley.
- [15] PISKUNOV, N. (1983). *Cálculo diferencial e integral* (6th ed.). Mir Moscú.
- [16] STEWART, J. (2020). *Calculus: Early Transcendentals* (9th ed.). Cengage Learning.
- [17] LARSON, R., & EDWARDS, B. H. (2018). *Calculus* (11th ed.). Cengage Learning.
- [18] THOMAS, G. B., WEIR, M. D., & HASS, J. (2018). Thomas? *Calculus* (14th ed.). Pearson.
- [19] ADAMS, R. A., & ESSEX, C. (2017). *Calculus: A Complete Course* (9th ed.). Pearson.
- [20] ANTON, H., BIVENS, I., & DAVIS, S. (2016). *Calculus* (11th ed.). Wiley

Este libro se terminó de publicar en la editorial

**Instituto Universitario
de Innovación Ciencia y Tecnología Inudi Perú**



ISBN: 978-612-5130-44-0

